ERWEITERUNG DES VIERSCHEITELSATZES AUF DREIDIMENSIONALE KURVEN

VON ARTHUR MOÓR

Einleitung. Der Vierscheitelsatz besagt, dass jede zweidimensionale konvexe Kurve mit stetiger Krümmung mindestens vier Scheitelpunkte hat (Vgl. [2]). Ein Scheitelpunkt ist ein solcher Punkt der Kurve, in dem die erste Ableitung der Krümmung verschwindet. Der Schmiegungskreis berührt also die Kurve mindestens von dritter Ordnung. (Die Kurve und der Krümmungskreis haben in den Scheitelpunkten mindestens vier Punkte gemeinsam.)

Im Folgenden betrachten wir geschlossene Raumkurven C mit der Eigenschaft, dass durch je zwei ihrer Punkte mindestens eine Ebene hindurchlegbar ist, die die genannte Raumkurve in keinen anderen Punkten trifft; weiter wollen wir zur Kurve gebundene Invarianten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, konstruieren, deren Ableitungen längs der gegebenen Kurve mindestens viermal verschwinden. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ müssen natürlich Funktionen der Krümmung κ, und der Torsion τ und deren Ableitungen sein, denn eine Raumkurve ist von diesen zwei Invarianten bestimmt.

1. **Der allgemeine Fall.** Durch die Gleichungen

$$x_i = x_i(s) \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1}$$

ist eine Raumkurve C definiert von der wir annehmen wollen, dass sie die in der Einleitung angegebenen Eigenschaften Besitzt. s bedeutet wie gewöhnlich der Bogenparameter; die Funktionen (1) sind wegen der Geschlossenheit periodisch, ihre Periode ist eben die Länge von C.

SATZ 1. *Hat eine Invariante $\mathfrak{A}$ von C die Eigenschaft, dass*

$$\oint_C \mathfrak{A}\xi_i \, ds = 0, \tag{2}$$

wo man längs C integrieren soll, und ξ_i den Tangentenvektor bezeichnet, so hat die Invariante $\mathfrak{A}' = d\mathfrak{A}/ds$ längs C mindestens vier Nullstellen.

Zum Beweis müssen wir nur die von Blaschke (Vgl. [1; S 16, §9]) gegebene Methode im dreidimensionalen Raum anwenden; es ist wegen (2) und der Periodizität nach partieller Integration

$$\begin{aligned} &\oint_C (a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)\mathfrak{A}' \, ds \\ &\qquad = \oint_C a_0\mathfrak{A}' \, ds + \oint_C (a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3)\mathfrak{A} \, ds = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Received October 1, 1949; in revised form, August 3, 1950.