SUR UN THÉORÈME DE BANACH

PAR J. DIXMIER

Introduction. Rappelons deux théorèmes énoncés dans [1].

THÉORÈME A. *Soit E' le dual d'un espace de Banach séparable E, et V un sous-espace vectoriel de E'. V est régulièrement fermé si et seulement si V contient la limite faible de toute suite faiblement convergente extraite de V.*

THÉORÈME B. *Conservons les mêmes notations. Pour que tout point de E' soit limite faible d'une suite extraite de V, il faut et il suffit qu'il existe une constante $k > 0$ telle que, pour tout $x \in E$, on ait*

$$\sup_{f \in V, \|f\|=1} | f(x) | \geq k \| x \|.$$

Y a-t-il des théorèmes correspondants lorsque E n'est pas séparable? Pour le théorème A, la réponse est bien connue: V est régulièrement fermé si et seulement si $V \cap S_1$ (S_r : boule $\| f \| \leq r$ dans E') est faiblement compact (voir [3]). Le cas du théorème B n'a par été, à ma connaissance, examiné.

L'étude de cette question amène d'abord à présenter la généralisation du théorème A sous une forme légèrement différente, plus voisine du théorème A lui-même. Étant donné un ensemble $\mathcal{E} \subset E'$, on désignera par $\mathcal{E}^{(1)}$ la réunion des adhérences faibles des ensembles $\mathcal{E} \cap F$, où F est un ensemble *borné* quelconque de E'. (Si E est séparable, $\mathcal{E}^{(1)}$ coïncide avec l'ensemble des limites faibles des suites faiblement convergentes extraites de $\mathcal{E}$.) Alors, V est régulièrement fermé si et seulement si $V = V^{(1)}$.

On peut désormais généraliser le théorème B, sous la forme que voici: pour que $V^{(1)} = E'$, il faut et il suffit qu'il existe une constante $k > 0$ telle que, pour tout $x \in E$, on ait

$$\sup_{f \in V, \|f\|=1} | f(x) | \geq k \| x \|.$$

La démonstration que nous donnons de ce théorème est plus simple que celle de Banach, et elle fait apparaître que les propriétés de la convexité jouent ici un rôle important. Mais surtout, elle nous amène à préciser le sens de la meilleure constante k possible, que nous appelons *caractéristique* de V. En effet, cette caractéristique *est le plus grand nombre r* ($0 \leq r \leq 1$) *tel que $V \cap S_1$ soit faiblement partout dense dans S_r*. On peut donner deux autres définitions intéressantes de la caractéristique (voir théorèmes 8 et 9).

La nécessité de cette étude provient au fond du fait, établi implicitement dans [5], qu'on peut avoir $r = 0$ même quand V est faiblement partout dense dans E': c'est le cas "pathologique". Les différentes définitions de la carac-

Received February 26, 1948.