ÜBER DEN FÜHRER EINES RINGES IN ALGEBRAISCHEN ZAHLKÖRPERN

Von Michael Bauer

1. Es sei α eine primitive ganze Zahl des algebraischen Zahlkörpers $K = R(\alpha)$. Der Führer des Ringes $O(\alpha)$ ist bekanntlich ein Ideal, dasselbe soll durch $\mathfrak{t}(\alpha)$ bezeichnet werden. Nach Dedekind hat man

$$(1) \qquad \vartheta = \mathfrak{t}(\alpha)\mathfrak{d}, \qquad |D| = N(\mathfrak{d}),$$

wo ϑ, beziehungsweise $\mathfrak{d}$ die Differente der Zahl α, bzw. des Körpers K ist, D ist die Körperdiskriminante und N bedeutet die Norm.

Ore[1] hat den Führer des Ringes $O(\alpha)$ einer weiteren Untersuchung unterzogen, indem er den Führer inbezug auf die Primzahl p, bzw. auf das Primideal $\mathfrak{p}$ eingeführt hat. Die Ideale $\mathfrak{t}_p(\alpha)$ bzw. $\mathfrak{t}_\mathfrak{p}(\alpha)$ werden durch die ganzen Zahlen φ_1, bzw. φ_2 gebildet, für welche

$$\varphi_1\omega \equiv P_1^{(t)}(\alpha) \pmod{p^t} \text{ bzw. } \varphi_2\omega \equiv P_2^{(t)}(\alpha) \pmod{\mathfrak{p}^t}$$

ausfallen, wo $P_1^{(t)}$, $P_2^{(t)}$ rationale ganzzahlige Polynome sind. Die Zahl ω ist eine beliebige ganze Körperzahl, ferner ist t eine beliebige positive rationale ganze Zahl. Nun ist zunächst

$$(2) \qquad \mathfrak{t}(\alpha) = \prod_p \mathfrak{t}_p(\alpha).$$

Das Ideal $\mathfrak{t}_p(\alpha)$ lässt sich weiter zerlegen, genügt α der irreduziblen ganzzahligen Gleichung $F(x) = 0$, so spielt bei der Zerlegung von $\mathfrak{t}_p(\alpha)$ die Zerlegung von $F(x) \pmod{p^\nu}$ in irreduzible Faktoren eine entscheidende Rolle. Es sei im Körper K in Primideale zerlegt

$$(3) \qquad p = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_k^{e_k} \cdots \mathfrak{p}_r^{e_r},$$

wo $\mathfrak{p}_k$ ein Primideal g_k-ten Grades bezeichnet, dann ist in irreduzible Faktoren, deren höchste Koeffizienten gleich Eins sind, zerlegt

$$(3^*) \qquad F(x) \equiv F_1(x) \cdots F_k(x) \cdots F_r(x) \pmod{p^\nu}$$

wenn $\nu \geqq \delta + 1$ ausfällt, wo p^δ die höchste Potenz von p ist, die in der Diskriminante $D(F(x))$ enthalten ist. Gehört $\mathfrak{p}_k$ im Sinne von Ore[2] zum Polynom $F_k(x)$, so ist sein Grad $n_k = e_k g_k$. Es sei $F_l(\alpha)$ genau durch $\mathfrak{p}_k^{\gamma_{kl}}$ $(k \neq l)$ teilbar. Das Ideal $\mathfrak{t}_{\mathfrak{p}_k}(\alpha)$ ist eine Potenz von $\mathfrak{p}_k$, man kann setzen

$$(4) \qquad \mathfrak{t}_{\mathfrak{p}_k}(\alpha) = \mathfrak{p}_k^{\tau_k},$$

Received May 14, 1936.

[1] *Über den Zusammenhang zwischen den definierenden Gleichungen und der Idealtheorie in algebraischen Körpern*, Math. Annalen, Bd. 96 (1927), S. 313–352.

[2] A.a.O. S. 326.