The Annals of Mathematical Statistics
1969, Vol. 40, No. 1, 284–289

VARIATION QUADRATIQUE DES MARTINGALES CONTINUES À DROITE[1]

PAR CATHERINE DOLÉANS

University of Illinois

Millar a montré dans [4] le résultat suivant: si (X_s) est une martingale continue, les sommes $\sum_{i=0}^{m-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$ convergent en probabilité lorsque la subdivision $S = (t_0, \cdots, t_m)$ de $[0, t]$ devient arbitrairement fine; de plus, si pour un certain p réel, $1 < p < \infty$, les variables aléatoires X_s sont toutes L^p intégrables, la convergence a lieu dans $L^{p/2}$.

Nous généralisons ce résultat au cas des martingales continues à droite: ce résultat a été déjà obtenu par Meyer dans [3] pour $p = 2$ et pour une martingale quasi continue à gauche.

La terminologie sera celle de [2]. $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ désigne un espace probabilisé complet, $(\mathfrak{F}_s)_{s\varepsilon\mathbf{R}_+}$ est une famille de sous-tribus de $\mathfrak{F}$, croissante, continue à droite, et on suppose comme toujours que $\mathfrak{F}_0$ contient les ensembles négligeables de $\mathfrak{F}$. Dans toute la suite t désignera un nombre réel positif et $S = (t_0, \cdots, t_m)$ désignera une subdivision de l'intervalle $[0, t]$. On dira que les subdivisions $S_k = (t_0^k, \cdots, t_{m_k}^k)$ de $[0, t]$ deviennent arbitrairement fines si $\sup_{0 \leq i < m_k} |t_{i+1}^k - t_i^k|$ tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$.

Nous généralisons tout d'abord le Théorème 2, page 92 de [3] au cas d'une martingale continue à droite:

THÉORÈME 1. *Soit $(X_s)_{s\varepsilon\mathbf{R}_+}$ une martingale continue à droite telle que l'on ait $\mathbf{E}[X_s^2] < +\infty$ pour tout s; les sommes*

$$R_S = \sum_{i=0}^{m-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$$

convergent dans L^1 lorsque les subdivisions $S = (t_0, \cdots, t_m)$ de $[0, t]$ deviennent arbitrairement fines.

DÉMONSTRATION. (1) On ne considère la martingale (X_s) que sur l'intervalle $[0, t]$, on peut donc appliquer les théorèmes T. 29 et T. 30 du Chapitre VIII de [2].[2] Ce qui donne pour (X_s) la décomposition:

$$X_s = Y_s + Z_s$$

où (Y_s) et (Z_s) sont deux martingales continues à droite vérifiant $\mathbf{E}[Y_t^2] < +\infty$, $\mathbf{E}[Z_t^2] < +\infty$; (Z_s) est une martingale quasi continue à gauche, $Y_0 = 0$ et (Y_s) est orthogonale à toute martingale de carré intégrable quasi continue à gauche.

Il existe de plus, d'après la démonstration de T. 30 Chapitre VIII [2], une

Received 31 May 1968.

[1] Cette recherche a été supportée par la "United States National Science Foundation".

[2] Tel qu'il figure dans [2] T.29 est inexact; voici une des rectifications proposées par Meyer: T.29 est vrai pour les temps d'arrêt prévisibles (c.a.d. limite d'une suite croissante de temps d'arrêt strictement inférieurs), on en déduit T.30 en utilisant le fait que le graphe d'un temps d'arrêt accessible est contenu dans une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt prévisibles.