ARKIV FÖR MATEMATIK Band 7 nr 4

1.66 07 1 Mitgeteilt am 27. April 1966 von O. Frostman und L. Carleson

Eine Nevanlinna-Picardsche Theorie en miniature

Von Raymond M. Redheffer

1. Einleitung

Für passende Funktionenklassen $\{F\}$ betrachtet man Gleichungen der Form $F(z)-a=0$, worin a konstant ist. Eine Nevanlinna–Picardsche Theorie behauptet, grob gesprochen, dass die Anzahl der Wurzeln von a unabhängig ist. Nun ist eine solche Aussage offenbar für reelle Funktionen falsch, und man fragt sich: warum sollte es im Komplexen anders sein? Um das einzusehen, schreiben wir „∞" statt „0". Die Gleichung lautet jetzt $F(z)-a=\infty$, die Wurzeln sind die Pole der Funktion F, und bei verschiedenen Werten von a sind sie nicht nur in derselben Anzahl vorhanden, sie liegen sogar an denselben Stellen. Aber auf der Riemannschen Kugel ist der Punkt „∞" ebensowenig ausgezeichnet wie z. B. der Punkt „0". Darin erkennen wir einen Grund dafür, dass Sätze der Nevanlinna–Picardschen Art überhaupt möglich sind.

Dieser Ideenkreis hat sich in zwei Richtungen entfaltet. Einerseits hat man die Funktionenklasse $\{F\}$ nach und nach erweitert. Die Sätze von Borel beziehen sich auf ganze Funktionen endlicher Ordnung, während keine Ordnungsbeschränkung für die Ergebnisse von Picard nötig ist. Nevanlinna hat die Theorie auf meromorphe Funktionen ausgedehnt, und Ahlfors, Sario u. a. haben die Theorie für Funktionen auf beliebigen Riemannschen Flächen entwickelt. — Andererseits wird die „Anzahl" der Nullstellen mit mehr oder weniger Genauigkeit angegeben. Die Sätze von Picard behaupten nur die Existenz der Nullstellen, diejenigen von Borel bestimmen den Konvergenzexponenten, und andere Sätze geben sogar Aussagen über die Verteilungsdichte. Diese ist viel genauer als jener; der Konvergenzexponent ist immer 1 wenn die Dichte endlich und positiv ist, manchmal auch wenn sie 0 oder ∞ ist.

Es wäre aber interessant, die unendliche Menge von Nullstellen mit einem Fehler *kleiner als eins* abzuzählen. Wenn z. B. die Funktion $\sin \frac{1}{2}z$ die „Anzahl" $N=\infty$ Nullstellen hat, dann möchte ich gern sagen, dass $(z^3+1)\sin\frac{1}{2}z$ die Anzahl $n=\infty+3$ hat, dass $\sin z$ die Anzahl 2∞ hat, dass $z^{-1}\sin z$ die Anzahl $2\infty-1$ hat, usw. Wie kann man aber eine unendliche Menge von komplexen Zahlen $\{\lambda_n\}$ derart präzis zählen?

Zuerst betrachten wir das Vollständigkeitsintervall der Funktionenfolge $\{\exp i\lambda_n x\}$. Das Intervall hat die Länge I wenn die Folge auf jedem Intervall kleinerer Länge als I vollständig ist, aber auf keinem Intervall von grösserer Länge als I. Ist die Menge auf keinem Intervall vollständig, so setzt man $I=0$, und ist die Menge auf jedem endlichen Intervall vollständig, so setzt man $I=\infty$. Für die Klasse L^p, $1\leqslant p\leqslant\infty$, ist I offenbar wohl bestimmt, und von p unabhängig.