ARKIV FÖR MATEMATIK Band 4 nr 41

Communiqué le 10 Janvier 1962

Remarques sur les groupes abéliens infinis admettant une base finie

Par Trygve Nagell

1. Nous désignerons par A, B et C des éléments de groupes abéliens infinis, par a, b, c, d, f, g, u et v des nombres entiers rationnels et par i, j, m, q, r et s des nombres naturels. It faut d'abord préciser certaines notions, à propos des groupes abéliens infinis, que nous allons employer. Rappelons aussi de quelques faits simples au sujet de ces groupes.

Soit $\mathfrak{G}$ un groupe abélien infini. La composition des éléments dans $\mathfrak{G}$ sera désignée par le symbole d'addition $+$. Supposons qu'il existe dans $\mathfrak{G}$ un nombre fini d'éléments $A_1, A_2, \ldots, A_s$ tels qu'un élément quelconque C dans $\mathfrak{G}$ peut être généré de la manière suivante

$$C = c_1 A_1 + c_2 A_2 + \ldots + c_s A_s,$$

$c_1, c_2, \ldots, c_s$ étant des nombres entiers rationnels. Alors le système $A_1, A_2, \ldots, A_s$ sera appelé un *système générateur* de $\mathfrak{G}$, et nous désignerons le groupe par $\mathfrak{G}(A_1, A_2, \ldots, A_s)$. Ce système s'appelle une *base* du groupe quand le nombre s a sa valeur minimum. Alors il est bien connu que tout sous-groupe de $\mathfrak{G}$ admet aussi une base finie; voir p. ex. [1][1], p. 39–41. Nous allons, entre autres, donner une precision de ce résultat.

Pour simplifier nous considérons seulement les groupes abéliens *purs* (on dit aussi: *sans torsion*). Ainsi tous les éléments sont d'ordre infini, excepté l'élément-unité. Les éléments $A_1, A_2, \ldots, A_m$ du groupe pur G (distincts de l'élément-unité) sont dits *indépendants* entre eux quand la relation

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + \ldots + a_m A_m = 0$$

ne peut subsister que pour $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0$; dans le cas contraire ceux-ci sont dits *dépendants* entre eux. Rappelons aussi les faits suivants: Pour que le système générateur $A_1, A_2, \ldots, A_r$ de $\mathfrak{G}$ constitue une base de $\mathfrak{G}$ il faut et il suffit que les éléments $A_1, A_2, \ldots, A_r$ soient indépendants. Le nombre d'éléments dans une base sera appelé le *rang* de $\mathfrak{G}$. Le rang est le nombre maximum d'éléments indépendants. Si r est le rang le système générateur $A_1, A_2, \ldots, A_r$ est une base. Pour les démonstrations nous renvoyons à [2], [3] ou [4].

[1] Les numéros figurant entre crochets renvoient à l'Index bibliographique placé à la fin de cette note.