ARKIV FÖR MATEMATIK Band 1 nr 13

Mitgeteilt am 12. Januar 1949 durch MARCEL RIESZ und H. CRAMÉR

Über die Struktur stationärer zufälliger Funktionen

Von KARI KARHUNEN

In einer früheren Abhandlung (KARHUNEN [1]) haben wir eine einheitliche lineare Theorie der zufälligen Funktionen zu entwickeln versucht und einige Anwendungen auf stationäre zufällige Funktionen behandelt. Im folgenden werden wir die letztgenannten Fragen etwas tiefer untersuchen und dabei insbesondere die Resultate, die WOLD [1] und KOLMOGOROFF [1, 2] im Falle stationärer Folgen von zufälligen Grössen gewonnen haben, für stetige stationäre zufällige Funktionen verallgemeinern. Teilweise dieselben Probleme hat HANNER [1] mit einer anderen Methode ohne Zuhilfenahme der Spektraldarstellung behandelt.

Wo nicht anders gesagt wird, werden wir im folgenden der Terminologie und den Bezeichnungen unserer oben genannten Abhandlung folgen.

Diese Arbeit ist während unserem Aufenthalt als Dozentstipendiat an dem Institut für Versicherungsmathematik und Mathematische Statistik der Hochschule Stockholm durchgeführt worden. Es sei uns gestattet an dieser Stelle dem Vorgesetzten des Institutes, Herrn Prof. Dr. H. CRAMÉR, unseren tief empfundenen Dank für seine unermüdliche Hilfsbereitschaft und für manche wertvolle Ratschläge auszusprechen.

§ 1. Untergeordnete zufällige Funktionen

1. Es sei $x(t)$ eine zufällige Funktion und $L_2(x)$ der zu ihr gehörende lineare Raum (vgl. KARHUNEN [1], S. 26). Eine andere zufällige Funktion $y(u)$ heisst $x(t)$ (linear) *untergeordnet*, wenn $L_2(y) \subseteq L_2(x)$. Gilt insbesondere $L_2(y) = L_2(x)$ heissen $x(t)$ und $y(u)$ (linear) *zusammengeordnet.*

Ist insbesondere $x(t)$ stationär (vgl. KARHUNEN [1], S. 54), ist $y(t)$, welche wie $x(t)$ auf der reellen Zahlengerade definiert ist, ihr untergeordnet (bzw. zusammengeordnet), und sind $x(t)$ und $y(t)$ stationär korreliert, d. h. ist

$$r_{xy}(s-t) = E\, x(s)\, \overline{y(t)} \tag{1}$$

eine Funktion von $s-t$ allein, so sagen wir, dass $y(t)$ der zufälligen Funktion $x(t)$ *stationär untergeordnet* (bzw. zusammengeordnet) ist.

Wir bezeichnen mit $L_2(x; t)$ die geschlossene lineare Hülle der Menge $\{x(s), s \leqq t\}$. Ist $y(t)$ zu $x(t)$ stationär untergeordnet (bzw. zusammengeordnet) und gilt dazu $L_2(y; t) \subseteq L_2(x; t)$ (bzw. $L_2(y; t) = L_2(x; t)$) für alle t, so heisst die Unterordnung (bzw. Zusammenordnung) *gleichförmig.*