Über die Existenz der beschränkten automorphen Funktionen

Von LEO USKILA

Mit 1 Figur im Text

1. In der klassischen Uniformisierungstheorie werden die einfach zusammenhängenden Riemannschen Flächen nach ihrer konformen Abbildbarkeit in drei Typen eingeteilt. Die Fläche ist vom elliptischen, parabolischen oder hyperbolischen Typus, je nachdem sie eineindeutig und konform auf die Vollebene, die punktierte Ebene oder den Einheitskreis abgebildet werden kann. Ein zentrales Problem der modernen Funktionentheorie ist es dann, notwendige und hinreichende Bedingungen für jeden der obigen Fälle aufzustellen.

Die Riemannschen Flächen können auch nach anderen Prinzipien klassifiziert werden. Eine Riemannsche Fläche wird *nullberandet* genannt, wenn es keine Greenschen Funktionen der Fläche gibt. Wenn eine Greensche Funktion oder, was auf dasselbe herauskommt, eine eindeutige und beschränkte nichtkonstante harmonische Funktion auf der Fläche existiert, sagt man, dass die Fläche einen *positiven Rand* hat. Nach NEVANLINNA [2] ist eine Riemannsche Fläche nullberandet oder hat einen positiven Rand, je nachdem das harmonische Mass ihres Randes Null oder positiv ist. In Analogie mit der nachstehenden Ausdrucksweise können wir auch sagen, dass die Fläche vom *Nulltypus* oder *positiven Typus* in bezug auf die *beschränkten harmonischen* Funktionen ist, je nachdem sie einen Nullrand oder einen positiven Rand besitzt.

Im Falle einer endlich vielblättrigen Riemannschen Fläche F ist es durch den Kapazitätsbegriff sogleich möglich, notwendige und hinreichende Bedingungen dafür aufzustellen, dass die Fläche einen positiven Rand hat (MYRBERG [2]). Wenn m die Menge der Häufungspunkte der Projektionen der Verzweigungspunkte der Fläche auf der Grundebene ist, so hat F einen positiven Rand dann und nur dann, wenn die Kapazität von m positiv ist.

Jeder Riemannschen Fläche vom hyperbolischen Typus entspricht bekanntlich (z. B. WEYL [1]) eine wesentlich diskontinuierliche Gruppe G linearer Substitutionen, die das Innere des Einheitskreises in sich überführen («Hauptkreisgruppe»). Die Gruppe G enthält keine elliptischen Substitutionen und ist bis auf eine lineare Transformation, die den Einheitskreis auf sich abbildet, eindeutig bestimmt. Umgekehrt gehört auch zu jeder wesentlich diskontinuierlichen Gruppe linearer Substitutionen, die das Innere des Einheitskreises in sich überführen, eine bestimmte Klasse von Riemannschen Flächen, die aufeinander konform abbildbar sind, vorausgesetzt, dass diese Gruppe keine elliptischen Substitutionen enthält. Zwei hyperbolische