Communiqué le 1 Décembre 1954

Sur quelques problèmes dans la théorie des restes quadratiques et cubiques

Par Trygve Nagell

§ 1.

Soit E un ensemble infini de nombres premiers, et désignons par $A(x)$ le nombre des nombres premiers $\leqq x$ qui appartiennent à E. Alors, si $\pi(x)$ désigne le nombre de tous les nombres premiers $\leqq x$, nous dirons que les nombres premiers de E ont la *densité*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{A(x)}{\pi(x)}.$$

Si m et r sont deux nombres entiers positifs tels que $(m, r) = 1$, il est bien connu que les nombres premiers qui sont $\equiv r \pmod m$, ont la densité $\dfrac{1}{\varphi(m)}$.

Soit p un nombre premier impair. Désignons par $\psi^*(p; 2)$ le plus petit nombre premier impair qui est un non-reste quadratique modulo p; et désignons par $\pi^*(p; 2)$ le plus petit nombre premier impair qui est un reste quadratique modulo p. Dans des travaux antérieurs j'ai déterminé des bornes supérieures de $\psi^*(p; 2)$ et $\pi^*(p; 2)$ en fonctions de p; voir [1], [2] et [3].[1] Les fonctions $\psi^*(p; 2)$ et $\pi^*(p; 2)$ ne sont pas bornées. En effet, nous avons établi les relations suivantes (voir [4]):

$$\limsup_{p\to\infty} \psi^*(p; 2) = \infty$$

et

$$\limsup_{p\to\infty} \pi^*(p; 2) = \infty.$$

Ces résultats sont contenus dans les suivants qui sont plus généraux:

Théorème 1. *Soit p_n le $n^{\text{ième}}$ nombre premier $(n > 1)$. Alors la densité des nombres premiers p ayant la propriété que $\psi^*(p; 2) = p_n$, est égale à* $\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

[1] Les numéros figurant entre crochets renvoient à la Bibliographie placée à la fin de Mémoire.