

SUR LES CYCLES DES SUBSTITUTIONS.

Par

JACQUES TOUCHARD

à PARIS.

Introduction.

Certaines questions d'analyse combinatoire, comme le problème des rencontres, traité par Euler, ou comme son extension, traitée par Sylvester, conduisent à rechercher, d'une manière plus générale, quel est le nombre u_n des substitutions de n lettres ou de n indices dont les cycles possèdent une certaine propriété. Telle est l'origine du présent travail.

La nature des propriétés attribuables aux cycles ayant été préalablement précisée, nous serons en mesure, au § I, d'établir des formules récurrentes propres au calcul numérique des nombres u_n . A l'aide de ces formules, on peut soit remonter aux fonctions génératrices

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} u_n \frac{z^n}{n!},$$

soit se borner à obtenir, de proche en proche, des expressions algébriques que nous désignerons, avec M. G. Pólya, sous le nom d'indicateurs de cycles et qui mettent, en effet, en évidence la constitution de certaines familles de substitutions au moyen de leurs cycles jouissant des propriétés envisagées.

Il se trouve que certains polynômes étudiés autrefois par Appell¹ et, en particulier, les polynômes d'Hermite ou, du moins, des polynômes qui s'en déduisent par un changement de variable immédiat, peuvent être considérés comme des indicateurs de cycles. C'est ce que nous établissons, entre autres choses, dans notre § II.

¹ P. APPELL. — Ann. Ec. Norm. sup. T. IX, 1880, p. 119.