Ark. Mat., **41** (2003), 375–379

Über Banachverbandsalgebren vom Typ 1

Egon Scheffold

Eine endlichdimensionale Banachverbandsalgebra, bei welcher jedes positive Element regulär ist, ist isomorph zu $\mathbf{R}$. Ob dies auch im unendlichdimensionalen Fall gilt, ist eine offene Frage. In dieser Note möchte ich zeigen, daß die Aussage auch für Banachverbandsalgebren vom Typ 1 richtig ist.

Eine *reelle Banachverbandsalgebra* A ist ein reeller Banachverband, welcher gleichzeitig eine reelle (lineare assoziative) Algebra mit den beiden folgenden Eigenschaften ist: $xy \geq 0$ und $\|xy\| \leq \|x\|\,\|y\|$ für alle positiven Elemente x und y von A. Besitzt die Algebra A ein Einselement e, so wird stets gefordert, daß $e \geq 0$ und $\|e\|=1$ ist. Den positiven Kegel von A bezeichnen wir mit A_+.

Für $x \in A$ bezeichne $r(x)$ den Spektralradius, $\sigma(x)$ das Spektrum, $\varrho(x)$ die Resolventenmenge und $R(\lambda, x) := (\lambda e - x)^{-1}$ die Resolventenabbildung von x, wobei bekanntlich x als Element der komplexen Banachverbandsalgebra $A_{\mathbf{C}}$, der Komplexifizierung von A, betrachtet wird. Ferner sei $\mathbf{R}_+ = \{\alpha \in \mathbf{R} : \alpha > 0\}$ und $\mathbf{R}_- = -\mathbf{R}_+$.

Nach [1] nennen wir eine unitale Banachverbandsalgebra vom *Typ* 1, falls gilt

$$a \geq 0 \quad \text{impliziert} \quad a(e+a)^{-1} \geq 0.$$

Die Funktionen-Banachverbandsalgebren $C(K)$ sind trivialerweise vom Typ 1, wenn K ein kompakter Hausdorffraum ist. Nicht triviale Beispiele anzugeben, ist nicht einfach, da man zunächst die inversen Elemente $(e+a)^{-1}$ kennen muß.

Die reellen 2×2-Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

versehen mit der Zeilensummennorm und der kanonischen Ordnung, bilden eine Banachverbandsalgebra vom Typ 1. Sei nämlich

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \geq 0.$$