

Conditions multiplicatives sur l'ensemble des valeurs d'un polynôme

MAURICE MIGNOTTE

Centre scientifique, Saint-Denis, France

Introduction

Soit P un polynôme unitaire sur \mathbf{Z} de degré $d \geq 1$. On désigne par E l'ensemble des valeurs $P(x)$ quand x parcourt \mathbf{Z} .

On s'intéresse d'abord à la condition suivante

M1: E est stable par multiplication.

Si on choisit x dans E et si M1 est vérifiée, E contient toutes les puissances de x . Ceci amène à envisager la condition suivante

M2: E contient toutes les puissance d'un même nombre x tel que $|x| > 1$.

On peut encore affaiblir cette condition en

M3: E contient une infinité de puissances d'un même nombre g tel que $|g| > 1$.

A ce stade, il se pose les problèmes suivants: trouver les polynômes unitaires qui vérifient les conditions Mi, les conditions Mi sont-elles équivalentes?

Nous nous proposons de résoudre ces deux problèmes.

Préliminaires

Pour p premier et a entier, soit h tel que $p^h|a$ et $p^{h+1} \nmid a$, on pose $|a|_p = p^{-h}$.

Soit $g = \pm p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r}$ la décomposition de g en facteurs premiers. Pour a entier, on pose

$$|a|_g = \max(|a|_{p_1}^{1/e_1}, \dots, |a|_{p_r}^{1/e_r})$$

où

$$1_i = \log(g)(e_i \log p_i)^{-1}, \quad i = 1, \dots, r.$$

En particulier, pour n entier, on a

$$|g^n|_g = g^{-n}. \tag{1}$$