SUR UNE RELATION DONNÉE PAR M. CAYLEY, DANS LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Extrait d'une lettre adressée à M. Mittag-Leffler

PAR

CH. HERMITE.

Le n° d'Octobre 1882, du Bulletin des Sciences Mathématiques de M. DARBOUX, contient à la page 215, une équation intéressante pour la théorie des fonctions elliptiques, qui a été découverte par M. CAYLEY, et donnée par l'illustre géomètre sous la forme suivante. Supposons les quatre quantités u, v, r, s, assujetties à la condition

$$u + v + r + s = 0,$$

on aura:

$$\begin{aligned} &- k'^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s \\ &+ \quad \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s \\ &- \frac{1}{k^2} \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s = -\frac{k'^2}{k^2} \end{aligned}$$

Cette équation remarquable se démontre facilement au moyen des formules dont je fais usage depuis longtemps dans mes leçons de la Sorbonne, et qui donnent la décomposition en élements simples, des trois quantités:

$$\operatorname{sn} x \operatorname{sn}(x + a), \qquad \operatorname{cn} x \operatorname{cn}(x + a), \qquad \operatorname{dn} x \operatorname{dn}(x + a).$$

Soit

$$Z(x) = \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)},$$