Communiqué le 28 mai 1952

Remarques sur les corps résolvants des coniques, cubiques et quartiques

Par Trygve Nagell

1. Coniques. — Dans une note qui vient de paraître dans ce Journal (voir Nagell, Un théorème arithmétique sur les coniques, Arkiv f. Matematik, Bd 2, Nr 14, Stockholm 1952) j'ai établi le résultat suivant:

Théorème 1. *Soit C une conique propre (irréductible) rationnelle dans le domaine Ω, qui n'admet aucun point rationnel dans Ω. Alors tout corps résolvant de C dans Ω est d'un degré pair relativement à Ω.*

Nous allons compléter un détail dans la démonstration de cette proposition. Supposons qu'il y ait sur C un système rationnel S_n de n points et que $n = 2m - 1$ soit un nombre impair $\geqq 3$. Par ces points et par

$$\mu = \tfrac{1}{2} m (m+3) - (2m-1)$$

points rationnels $P_1, P_2, \ldots, P_\mu$ en dehors de la conique je puis faire passer une courbe algébrique $C^{(m)}$ de degré m. Cette courbe aura évidemment les coefficients rationnels. On voit que $\mu \geqq 2$.

Pour $m = 2$ on a $\mu = 2$; dans ce cas les deux coniques C et $C^{(2)}$ sont distinctes, vu que les points rationnels P_1 et P_2 sont en dehors de C. Pour $m \geqq 3$ on a $\mu \geqq 4$; dans ces cas on peut choisir les μ points $P_1, P_2, \ldots, P_\mu$ de telle façon que la courbe $C^{(m)}$ ne contienne pas la conique C. En effet, pour obtenir cela il suffit de les choisir tels qu'ils ne soient pas tous sur une même courbe algébrique $C^{(m-2)}$ de degré $m-2$. C'est possible puisqu'on a

$$\mu = \tfrac{1}{2} m (m+3) - 2m + 1 > \tfrac{1}{2} (m-2)(m+1).$$

Alors la courbe $C^{(m)}$ coupera la conique en exactement $2m$ points, qui formeront un système rationnel. Parmi ces points se trouvent aussi le système rationnel S_n de $n = 2m - 1$ points. On en conclut qu'il y a nécessairement un point rationnel sur la conique C. Comme cela est contre l'hypothèse, le théorème 1 se trouve démontré.

2. Cubiques. — D'une manière analogue on peut compléter la démonstration de la proposition suivante (voir Nagell, Sur la résolubilité des équations cubiques à deux inconnues dans un domaine relativement algébrique, Nova Acta Regiae Societatis Scientarum Upsaliensis, Ser. IV, Vol. 13, N:o 3, p. 5 Uppsala 1942):