ARKIV FÖR MATEMATIK Band 2 nr 6

Mitgeteilt am 5. Dezember 1951 durch ARNE BEURLING und J. MALMQUIST

Über die Existenz der automorphen Funktionen mit beschränktem Dirichletintegral

Von LEO ULLEMAR

In meiner Arbeit USKILA [1] wurden die symmetrischen Hauptkreisgruppen vom Geschlecht $p = 0$ ohne elliptische Substitutionen in bezug auf die Existenz der eindeutigen nichtkonstanten *beschränkten* automorphen Funktionen klassifiziert. Diese Arbeit bildet eine natürliche Fortsetzung des Gedankenganges. Die genannten Hauptkreisgruppen werden hier in bezug auf die Existenz der eindeutigen nichtkonstanten automorphen Funktionen mit *beschränktem Dirichletintegral* über den Fundamentalbereich klassifiziert. Um ein Kriterium dafür zu erhalten, wird ein neues harmonisches Mass eingeführt, das infolge seines Zusammenhanges mit dem klassischen harmonischen Mass von NEVANLINNA von Interesse sein dürfte.

1. Ein einfach zusammenhängender Teilbereich B_0 des Kreises $|z| < 1$ wird von einer abgeschlossenen Punktmenge E auf dem Kreise $|z| = 1$ und einer offenen Punktmenge E' begrenzt. Die Menge E' besteht aus einer endlichen oder abzählbar unendlichen Anzahl offener punktfremder Orthogonalkreisbogen

$$b_0, \; b_1, \; b_2, \; \ldots \tag{1}$$

des Kreises $|z| = 1$. Durch eine lineare Transformation wird immer erreicht, dass der Punkt $z = 0$ ein innerer Punkt von B_0 ist.

Wenn B_0 an irgend einem der Bogen (1), z. B. an b_0, gespiegelt wird, erhält man ein Polygon $\bar{B}_0$, das mit B_0 einen Fundamentalbereich $B = B_0 + \bar{B}_0$ einer symmetrischen Fuchsschen oder fuchsoiden Gruppe G vom Geschlecht $p = 0$ ohne elliptische Substitutionen bildet, je nachdem die Anzahl der Bogen (1) endlich oder unendlich ist.

Problem. *Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz einer nichtkonstanten eindeutigen automorphen Funktion der Gruppe G zu finden, deren Dirichletintegral begrenzt ist und zwar*

$$\iint_{B_0} |f'(z)|^2 \, dx \, dy \leq \pi \qquad (z = x + iy). \tag{2}$$

Das entsprechende Problem für die analytischen Funktionen haben AHLFORS und BEURLING [1] gelöst. Diese Ergebnisse finden Anwendung auf unser Problem. Wesentlich für die Lösung ist die Einführung eines neuen harmonischen Masses $\Omega\,(z, E, G)$, das in Nr. 2 definiert wird.