Communiqué le 11 Octobre 1950 par F. Carlson et J. Malmquist

Sur les fractions continues monotones non-décroissantes périodiques

Par Folke Ryde

Soit donnée une fraction continue de la forme

$$\frac{a_1|}{|s a_1} + \frac{a_2|}{|a_2} + \frac{a_3|}{|a_3} + \cdots + \frac{a_m|}{|a_m} + \cdots,$$

où s; $a_1, a_2, a_3, \ldots a_m, \ldots$ sont des nombres entiers positifs tels qu'on ait

$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \cdots \leqq a_m \leqq \cdots.$$

Dans un mémoire présenté à l'Académie des sciences de Stockholm[1], j'ai traité cette classe de fractions continues sous le nom de *fractions continues monotones non-décroissantes.*

Les fractions continues monotones non-décroissantes sont *périodiques* si et seulement si tous les nombres a_n sont égaux pour tous les indices n à partir d'une certaine valeur N. Évidemment chaque fraction continue monotone non-décroissante périodique représente une quantité irrationnelle quadratique réelle. Mais le problème inverse présente des difficultés singulières. Le résultat le plus précis que j'ai obtenu dans cette direction est contenu dans le *théorème* suivant:

Soit donnée une équation quadratique irréductible $P\theta^2 + Q\theta + R = 0$, *dont les coefficients* P, Q *et* R *sont des nombres entiers sans aucun facteur commun et dont l'une des racines, soit*

$$\theta = \frac{\sqrt{Q^2 - 4PR}}{2P} - \frac{Q}{2P},$$

satisfait à la condition

$$0 < \frac{\sqrt{Q^2 - 4PR}}{2P} - \frac{Q}{2P} < 1.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que le développement uniquement déterminé de θ *sous la forme d'une fraction continue monotone non-décroissante soit périodique, c'est-à-dire qu'on ait*

---

[1] *Eine neue Art monotoner Kettenbruchentwicklungen,* Arkiv för matematik Bd 1. Nr 22 (1950).