Vorgelegt am 12. April 1950

Ein Problem bei dyadischer Zahlendarstellung

Von A. WIMAN

1. Bei gewissen Untersuchungen von p-Gruppen von maximaler Klasse stösst man auf eine Aufgabe, welche, freilich in umschriebener Gestalt, wir als Gegenstand für die folgende Note gewählt haben. Wir betrachten den Ausdruck $(1 + x)^p$, wo p eine beliebige ganze Zahl > 0 sein kann; das eigentliche Interesse knüpft sich jedoch an den Fall, wo p eine Primzahl bedeutet. Für diesen Ausdruck haben wir die Entwicklung:

$$(1) \qquad (1 + x)^p = (1 + x) + x(1 + x) + x[1 + x + x(1 + x)] + x[\ ] + \cdots,$$

wo jeder folgende Klammer die ganze vorangehende Entwicklung enthält. In dieser Weise bekommen wir die vollständige Entwicklung nach p Klammern. Gehen wir für $p = 5$ zur Potenzreihenentwicklung über, so ergibt sich aus (1):

$$(2) \qquad \begin{aligned}(1 + x)^5 = {} & 1 + x + x + x^2 + x + x^2 + x^2 + x^3 + x + x^2 + x^2 + \\ & + x^3 + x^2 + x^3 + x^3 + x^4 + x + x^2 + x^2 + x^3 + x^2 + \\ & + x^3 + x^3 + x^4 + x^2 + x^3 + x^3 + x^4 + x^3 + x^4 + x^4 + x^5.\end{aligned}$$

Wie unmittelbar ersichtlich ist, bekommt man für jede folgende Potenz die Entwicklung aus derjenigen der vorangehenden, indem man letztere mit x multipliziert und hinzufügt. Wir denken uns jetzt für jeden Exponenten p eine Entwicklung von der Art (2). Die Frage, um welche es sich in den folgenden Auseinandersetzungen handelt, lässt sich so formulieren. Wir betrachten zwei beliebige Potenzen x^h und x^k mit $0 < h < k < p$. Man soll berechnen, wie oft eine Potenz x^k früher als eine Potenz x^h in der Entwicklung auftritt. *Das eigentliche Ziel ist hier zu entscheiden, ob die gesuchte Anzahl durch p teilbar ist oder nicht.* Für h und k lässt sich noch die Beschränkung

$$(3) \qquad 0 < h < k; \quad h + k \leqq p$$

einführen. Man sieht ja leicht, dass für h, k und $p - k$, $p - h$ dieselbe Antwort gilt.

Man sieht leicht ein, dass das obige Problem in nahem Zusammenhange mit der dyadischen Darstellung der ganzen Zahlen steht. Dies gelingt, indem man in (1) und (2) von den Potenzen zu den Exponenten übergeht. In (1) fangen wir mit $1 + x$ an. Als zugehörige Exponenten hat man die einzifferigen dyadischen Zahlen 0 und 1. Im nächsten Abschnitte werden diese Exponenten um