ARKIV FÖR MATEMATIK Band 4 nr 1

Mitgeteilt am 3. Dezember 1958 durch T. NAGELL und LENNART CARLESON

Über ein Problem in der Theorie der Primzahlen

Von P. KUHN

Einleitung

Das Problem, das wir hier betrachten werden, geht auf eine Vermutung von Lehmer aus dem Jahre 1900 zurück [1] und wurde von Landau 1909 [2] gelöst. Es gehört zu den Primzahlproblemen, welche Landau im fünften Buche seines Standardwerkes über Primzahlen [3] behandelte und zu denen er in der historischen Einleitung bemerkte: „Die weiteren Primzahlprobleme, um welche es sich in diesem Buche handelt, sind keineswegs so beschaffen, dass ihre Lösung sich durch unmittelbare Anwendung der Ergebnisse und Methoden der ersten vier Bücher ergibt. Vielmehr muss dazu eine Reihe weiterer Überlegungen allgemeiner Natur hinzutreten, insbesondere in Bezug auf die bisher nur gelegentlich vorgekommene Benutzung Dirichletscher Reihen, welche bei freier Bahn mehrdeutige Funktionen definieren.“ [4]

Wir beschränken uns hier auf ein typisches Problem dieser Art, indem wir das folgende Theorem beweisen.

Theorem. *Es seien λ verschiedene zu k teilerfremde Restklassen $ky+l_1, \ldots, ky+l_\lambda$ gegeben. Es sei $\Theta(1)=1$ und für $n>1$*

$$\Theta(n)=1 \quad \textit{oder} \quad 0,$$

je nach dem alle Primzahlen von n einer jener λ Klassen angehören oder nicht. Es werde für die Eulersche Funktion $\varphi(k)=k\prod_{p|k}(1-p^{-1})=h$ gesetzt. Dann existiert

$$\lim_{x=\infty} \sum_{n\leqslant x} \Theta(n)\cdot x^{-1}\log^{1-\lambda h^{-1}} x \tag{1}$$

und ist >0.

Da der Beweis des Primzahlsatzes für die arithmetischen Progressionen (PAP) bereits im zweiten Buche des Landauschen Werkes enthalten ist, kann man sich mit Rücksicht auf die oben zitierte Bemerkung Landaus die Frage stellen, ob der Beweis von (1) mit elementaren Mitteln, d. h. ohne Anwendung der Funktionstheorie komplexer Variabler, geführt werden kann, wenn man den PAP als bewiesen voraussetzt. Diese Frage werden wir im Folgenden bejahen. Da der PAP inzwischen elementar bewiesen wurde [5], gelangen wir zu einem vollständig elementaren Beweis von (1).