ARKIV FÖR MATEMATIK Band 2 nr 20

Mitgeteilt am 23. April 1952 durch F. Carlson und T. Nagell

Zur Theorie der Zerlegung von Permutationen in Zyklen

Von Osias Gruder

Jede Permutation von n Elementen kann bekanntlich auf eine und — von der Reihenfolge der Zyklen abgesehen — nur eine Art als Produkt zyklischer Permutationen, die kein Element gemeinsam haben, dargestellt werden. Die Zerlegung von Permutationen in Zyklen gewinnt bei mehreren gruppentheoretischen Untersuchungen eine besondere Bedeutung.

J. J. Sylvester[1] hat über die Zerlegung von Permutationen in Zyklen die folgenden Sätze aufgestellt:

I. Die Anzahl aller Permutationen von n Elementen, die als Produkt von k elementenfremden Zyklen darstellbar sind, ist gleich der Summe der Produkte von je $n-k$ verschiedenen der Zahlen $1, 2, \ldots, n-1$.

II. Die Anzahl aller Permutationen von n Elementen, die als Produkt von k elementenfremden Zyklen ungerader Ordnung darstellbar sind, ist gleich der Summe aller jener Produkte von je $n-k$ verschiedenen der Zahlen $1, 2, \ldots, n-1$, in welchen die $n-k$ Faktoren aus $\frac{n-k}{2}$ Gruppen von je 2 aufeinanderfolgenden Zahlen bestehen.

III. Die Anzahl aller Permutationen von n Elementen, die als Produkt von k elementenfremden Zyklen darstellbar sind, wobei die Ordnungen aller Zyklen $\equiv 1 \pmod{m}$ sind, ist gleich der Summe aller jener Produkte von je $n-k$ verschiedenen der Zahlen $1, 2, \ldots, n-1$, in welchen die $n-k$ Faktoren aus $\frac{n-k}{m}$ Gruppen von je m aufeinanderfolgenden Zahlen bestehen.

Sylvester betrachtet hier kurz auch den allgemeinen Fall, in dem die Ordnungen aller Zyklen $\equiv a \pmod{b}$ sein sollen, ohne jedoch für diesen Fall das Bildungsgesetz für die gesuchte Anzahl der Permutationen mitzuteilen.

IV. Die Anzahl aller Permutationen von n Elementen, deren Zyklen alle von ungerader Ordnung sind, ist gleich

$$[1.\,3.\,5.\,\ldots\,(n-1)]^2 \quad \text{für} \quad n=2m$$
$$[1.\,3.\,5.\,\ldots\,(n-2)]^2 n \quad \text{für} \quad n=2m+1.$$

[1] James Joseph Sylvester:

1. Généralisation d'un théorème de M. Cauchy, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 1861, tome 53, p. 644—645.

2. Addition à la note intitulée: "Généralisation d'un théorème de M. Cauchy". Comptes Rendus, Paris, 1861, tome 53, p. 722—724.

3. On a generalization of a theorem of Cauchy on arrangements. Philosophical Magazine, 1861, volume 22, p. 378—382.

1, 2 und 3 auch in: The collected mathematical papers of J. J. Sylvester, vol. II, p. 245—246, 247—249, 290—293, (Cambridge, University Press, 1908).