ARKIV FÖR MATEMATIK Band 2 nr 13

Communiqué le 9 janvier 1952

Contributions à la théorie des séries de Dirichlet

Note IV

Par Fritz Carlson

1. Soient λ_v des nombres réels vérifiant

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 \ldots < \lambda_n < \lambda_{n+1} \ldots, \quad \lambda_n \to \infty$$

et C_n des nombres quelconques tels que

$$|C_n| \leq \lambda_{n+1}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Considérons la série

$$F(x) = \sum_{v=1}^{\infty} C_v \left\{ \frac{x}{\lambda_{v+1} - \lambda_v} \int_{\lambda_v}^{\lambda_{v+1}} e^{-ux} du - \frac{x}{\lambda_{v+2} - \lambda_{v+1}} \int_{\lambda_{v+1}}^{\lambda_{v+2}} e^{-ux} du \right\} \tag{2}$$

pour des valeurs réelles et positives de x. Les parenthèses étant positives, cette série a la majorante

$$\sum_{v=1}^{\infty} \lambda_{v+1} \left\{ \frac{x}{\lambda_{v+1} - \lambda_v} \int_{\lambda_v}^{\lambda_{v+1}} e^{-ux} du - \frac{x}{\lambda_{v+2} - \lambda_{v+1}} \int_{\lambda_{v+1}}^{\lambda_{v+2}} e^{-ux} du \right\} \tag{3}$$

série qui converge uniformément pour $x \geq \delta > 0$. On voit facilement que la somme (3) a la valeur

$$\frac{\lambda_2 e^{-\lambda_1 x} - \lambda_1 e^{-\lambda_2 x}}{\lambda_2 - \lambda_1} \leq 1$$

pour $x > 0$. La série (2) peut être dérivée. On aura

$$|F^{(n)}(x)| \leq \sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v \left| \frac{1}{\lambda_{v+1} - \lambda_v} \int_{\lambda_v}^{\lambda_{v+1}} e^{-ux} (x u^n - n u^{n-1}) du - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\lambda_{v+2} - \lambda_{v+1}} \int_{\lambda_{v+1}}^{\lambda_{v+2}} e^{-ux} (x u^n - n u^{n-1}) du \right|$$