Communiqué le 27 février 1952

Un théorème arithmétique sur les coniques

Par

TRYGVE NAGELL

1. Nous prenons pour domaine de rationalité fondamental un corps quelconque donné $\boldsymbol{\Omega}$. Par nombre rationnel nous entendons un nombre appartenant à $\boldsymbol{\Omega}$.

Le point dans le plan $P(x, y, z)$, en coordonnées homogènes, est appelé *point rationnel* quand les coordonnées sont proportionnels à trois nombres rationnels. Le point $P(x, y, z)$, sera appelé *point (relativement) algébrique* quand x, y et z sont proportionnels à trois nombres algébriques relativement à $\boldsymbol{\Omega}$. Sans restreindre la généralité nous pouvons supposer que l'un des nombres x, y, z soit égal à 1. Quand ces trois nombres appartiennent au corps $\boldsymbol{K}$, algébrique relativement à $\boldsymbol{\Omega}$, le point sera appelé *point algébrique du corps* $\boldsymbol{K}$ ou *appartenant au corps* $\boldsymbol{K}$. Supposons que le corps $\boldsymbol{K}_1 = \boldsymbol{\Omega}(x, y, z)$, engendré en adjoignant à $\boldsymbol{\Omega}$ les nombres x, y et z, soit du $m^{ième}$ degré relativement à $\boldsymbol{\Omega}$. Alors nous dirons que le point $P(x, y, z)$ est un *point algébrique du* $m^{ième}$ *degré*, et nous l'appellerons *point primitif du corps* $\boldsymbol{K}_1$. En désignant par $\alpha^{(i)}$ un nombre conjugué à α relativement à $\boldsymbol{\Omega}$ nous dirons que le point $P(x^{(i)}, y^{(i)}, z^{(i)})$ est un *point conjugué* au point $P(x, y, z)$ relativement à $\boldsymbol{\Omega}$.

L'ensemble des points conjugués sera appelé *système rationnel irréductible* de m points dans $\boldsymbol{\Omega}$. Nous appellerons *système rationnel* dans $\boldsymbol{\Omega}$ tout système de points composé d'un nombre de systèmes rationnels irréductibles dans $\boldsymbol{\Omega}$. Ce système est réductible, s'il est composé de plus d'un système irréductible. Un système rationnel de deux points est appelé *couple rationnel*, et un système rationnel de trois points *triplet rationnel*.

2. Nous dirons qu'une courbe algébrique plane

$$f(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

en coordonnées homogènes appartient à $\boldsymbol{\Omega}$ quand les coefficients de la forme ternaire $f(x, y, z)$ appartiennent à $\boldsymbol{\Omega}$. J'appellerai une droite à coefficients rationnels une *droite rationelle* (dans $\boldsymbol{\Omega}$), et d'une façon analogue je parlerai d'une *conique rationnelle*.

Soit $\boldsymbol{K}$ un corps algébrique du $m^{ième}$ degré relativement à $\boldsymbol{\Omega}$. Supposons donnée la courbe (1) appartenant à $\boldsymbol{\Omega}$ et supposons que l'équation (1) ait une solution en nombres x_0, y_0, z_0 appartenant à $\boldsymbol{K}$. Cette solution sera appelée *solution primitive en* $\boldsymbol{K}$ de l'équation (1), si le point $P(x_0, y_0, z_0)$ est un point primitif de