Communiqué le 12 octobre 1949 par F. Carlson

Les quantités irrationnelles quadratiques et les substitutions linéaires

Par Folke Ryde

Des recherches sur les fractions continues m'ont amené au théorème suivant:

Soit donnée une substitution linéaire $\frac{\alpha\theta+\beta}{\gamma\theta+\delta}$, *dont les coefficients* α, β, γ *et* δ *sont des nombres entiers quelconques avec la seule restriction que* $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$. *Soit aussi donnée une équation quadratique irréductible* $p\theta^2+q\theta+r=0$, *dont les coefficients* p, q *et* r *sont des nombres entiers sans aucun facteur commun, d'ailleurs quelconques avec la seule restriction qu'entraîne la condition d'irréductibilité. Cela posé, on peut toujours déterminer — et d'une infinité double de manières — une autre substitution linéaire* $\frac{A\theta+B}{C\theta+D}$, *dont les coefficients* A, B, C *et* D *sont des nombres entiers, tels que l'équation quadratique donnée peut s'écrire sous la forme*

$$\frac{A\theta+B}{C\theta+D}=\frac{\alpha\theta+\beta}{\gamma\theta+\delta}.$$

Nous désignerons dans ce qui suit par (a, b) le plus grand commun diviseur des nombres entiers a et b. Spécialement, nous poserons $(a, 0)=a$ et $(0, b)=b$. Nous désignerons de plus par $x=D_1(a, b\,|\,c)$, $y=D_2(a, b\,|\,c)$ un système de solutions de l'équation diophantienne linéaire $ax+by=c$, à savoir le système de solutions, pour lequel la valeur absolue de x est aussi petite que possible; s'il y a deux systèmes de solutions, pour lesquels les valeurs absolues de x sont égales et plus petites que pour les autres systèmes de solutions, nous désignerons par $x=D_1(a, b\,|\,c)$, $y=D_2(a, b\,|\,c)$ le système de solutions, pour lequel la valeur de x est positive.

Pour démontrer le théorème en question, il suffit de montrer que des nombres entiers A, B, C et D peuvent être déterminés en exprimant que l'équation

$$\frac{A\theta+B}{C\theta+D}=\frac{\alpha\theta+\beta}{\gamma\theta+\delta}, \tag{1}$$

ou, ce qui revient au même, puisque θ est un nombre irrationnel, l'équation

$$(A\theta+B)(\gamma\theta+\delta)-(C\theta+D)(\alpha\theta+\beta)=0 \tag{1'}$$