ARKIV FÖR MATEMATIK Band 8 nr 21

1.69 16 1 Communiqué le 3 Décembre 1969

Remarques sur une classe d'équations indéterminées

Par TRYGVE NAGELL

§ 1. La représentation d'un entier par les formes $Ax^3 + By^3$

1. Introduction. Les plus importants résultats sur la représentation d'un entier par les formes binaires cubiques ont été exposés dans les monographies de Nagell [1][1], p. 41–54, et de Skolem [2], p. 108–112, et dernièrement dans l'excellent livre de Mordell [3] Ch. 24. Vu que ces exposés sont de leur nature très concentrés, il s'ensuit la nécessité de les compléter par des éclaircissements sur l'histoire et la chronologie des découvertes ainsi que par la comparaison des différentes méthodes.

Grâce aux célèbres travaux d'Axel Thue les problèmes des équations diophantiennes de degré supérieur m'ont attiré dès le début. J'ai commencé par l'étude des équations simples de la forme

$$ax^3 + by^3 = c,$$

où les entiers a, b et c sont donnés, et où l'on cherche les solutions en entiers x et y, non nuls.

Dans le présent chapitre nous allons considérer les équations de cette forme particulière. Le cas général sera traité dans le chapitre suivant.

2. Théorème de Delaunay. Dans une note publiée en 1916 Boris Delaunay a annoncé, sans en donner la démonstration, le résultat suivant (voir [4]) :

Théorème 1. *Désignons par θ le nombre $\sqrt[3]{D}$, où D est un nombre naturel qui n'est pas un cube. Alors, l'équation cubique*

$$x^3 + Dy^3 = 1 \tag{1}$$

possède au plus une seule solution en nombres entiers x et y non nuls. Si x, y est une solution, le nombre $x + y\theta$ est l'unité fondamentale de l'anneau $\mathbf{R}(\theta)$.

Je n'ai observé cette note qu'en 1922. La même année j'ai publié deux mémoires dans lesquels j'ai montré par une méthode très simple que l'équation (1) admet au plus une seule solution; voir [5] et [6]. Ma démonstration de ce résultat étant peu connu, je me permets d'en donner une idée dans le numéro suivant.

3. Méthode de Nagell. Soit ζ l'unité fondamentale de l'anneau $\mathbf{R}(\theta)$, $0 < \zeta < 1$. Pour déterminer les unités (positives) de la forme binaire $c + a\theta$, a et c entiers rationnels, on aura à examiner la suite

$$\zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4, \ldots.$$

[1] Les numéros figurant entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de ce mémoire