ARKIV FÖR MATEMATIK Band 8 nr 20

1.69 14 1 Communicated 12 November 1969 by OTTO FROSTMAN

Sur une équation intégrale singulière

Par KARL DAGERHOLM

Considérons l'équation intégrale

$$\phi(x)\log x + \int_0^1 (y-x)^{-1}\phi(y)\,dy = 0, \tag{1}$$

où $0<x<1$ et $\log x$ est réel. L'équation (1) contient la fonction inconnue $\phi(x)$ sous le signe d'une intégrale divergente, entendue comme valeur principale de Cauchy. Quant à la solution de l'équation intégrale

$$a(x)\,u(x) - \lambda\int_{-1}^{+1}(y-x)^{-1}u(y)\,dy = f(x), \tag{2}$$

les fonctions $a(x)$ et $f(x)$ satisfaisant à des conditions différentes, on peut étudier par example T. Carleman [1], S. G. Mihlin [4], N. J. Muskhelishvili [5] et F. G. Tricomi [6]. Cependant le cas où $a(x)$ possède un point critique logarithmique ne paraît pas étudié.

Dans cet article je vais examiner l'existence d'une solution $\phi(x)$ de l'équation (1). Supposons que $\phi(x)$ soit de la forme

$$\phi(x) = \sum_{q=1}^{\infty} x_q x^{q-1},$$

où la série $\sum_{q=1}^{\infty} q^{-1}x_q$ converge. (3)

Donc $\phi(x)$ est intégrable sur $[0,1]$. On peut démontrer le théorème suivant.

Théorème. *La condition nécessaire et suffisante pour que* (1) *admette une solution* $\phi(x)\not\equiv 0$, *satisfaisant à la condition* (3), *est que le système d'équations*

$$\sum_{q=1}^{\infty}{}'(p-q)^{-1}x_q = 0 \quad (q = 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

ait une solution $x=(x_1, x_2, \ldots)\neq 0$ *qui rend les séries de* (4) *convergentes.*

On a pour $0<x<1$

$$\int_0^1 (y-x)^{-1}(\phi(y)-\phi(x))\,dy = \int_0^1 (y-x)^{-1}\phi(y)\,dy - \phi(x)\log(1-x)/x). \tag{5}$$

Donc l'équation (1) est équivalente à l'équation suivante

$$\phi(x)\log(1-x) + \int_0^1 (y-x)^{-1}(\phi(y)-\phi(x))\,dy = 0. \tag{6}$$