ARKIV FÖR MATEMATIK Band 8 nr 18

1.69 06 3 Communiqué le 9 Avril 1969

Sur un type particulier d'unités algébriques

Par TRYGVE NAGELL

§ 1. Introduction

1. Remarques générales. Dans plusieurs travaux j'ai étudié les solutions de l'équation

$$E + E_1 = 1 \tag{1}$$

en unités E et E_1 dans un corps algébrique $\mathbf{K}$; voir Nagell [1][1], Hilfssatz IV; [2], p. 346–347; [3], p. 176–177; [4], [5] et [6]. Chowla [7] a le premier montré que l'équation (1) n'admet qu'un nombre fini de solutions, résultat qui a été établi indépendamment par Nagell [4], Théorème 8. Il faut observer que la démonstration de ce résultat ne donne aucune méthode pour déterminer toutes les solutions.

Désignons par m le nombre de solutions de (1) dans un corps donné $\mathbf{K}$ sans compter la permutation de E et E_1. Si l'on a la solution donnée par (1), on a aussi les deux autres solutions

$$E^{-1} + (-E_1 E^{-1}) = 1, \quad E_1^{-1} + (-E E_1^{-1}) = 1. \tag{1 a}$$

Les trois solutions sont différentes entre elles sauf dans le cas où E et E_1 sont les racines de l'équation $x^2 - x + 1 = 0$. Nous dirons que les trois relations (1) et (1a) forment un *triplet*. Un triplet est complètement déterminé par une quelconque des unités qui y entrent. Ainsi une unité donnée appartient à un seul triplet dans le corps. Il en résulte que le nombre m de solutions de (1) est divisible par 3 quand le corps $\mathbf{K}$ ne contient pas le nombre $\sqrt{-3}$. Quand $\mathbf{K}$ contient ce nombre, on a $m \equiv 1 \pmod 3$.

Lorsque E et $E-1$ sont simultanément des unités dans un corps algébrique nous dirons que E est une *unité exceptionnelle*. Si E est une unité exceptionnelle, le nombre E^{-1} l'est aussi. En effet, la différence

$$E^{-1} - 1 = (1 - E)\, E^{-1}$$

est aussi une unité. On vérifie de même que les quatre nombres

$$1 - E,\ (1 - E)^{-1},\ 1 - E^{-1} \quad \text{et} \quad (1 - E^{-1})^{-1}$$

sont aussi des unités exceptionnelles. Les six nombres

$$E,\ E^{-1},\ 1 - E,\ 1 - E^{-1},\ (1 - E)^{-1} \quad \text{et} \quad (1 - E^{-1})^{-1}$$

[1] Les numéros figurant entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de ce travail.