ARKIV FÖR MATEMATIK Band 8 nr 14

1.69 02 2 Communiqué le 22 Janvier 1969

Quelques problèmes relatifs aux unités algébriques

Par Trygve Nagell

§ 1. Introduction

1. Mes recherches sur certains sujets de la théorie des nombres algébriques m'ont conduit à la question de résoudre l'équation

$$1+E+E_1=0 \tag{1}$$

en unités E et E_1 d'un corps algébrique donné **K**. Ainsi, dans un travail sur la représentation des nombres entiers par une forme binaire cubique, j'ai eu besoin de déterminer les solutions de l'équation (1) dans un corps cubique à discriminant négatif; voir Nagell [1][1], Hilfssatz IV. De plus, le problème de déterminer les points exceptionnels d'une certaine catégorie de courbes cubiques appartenant à un corps algébrique **K** exige qu'on détermine les solutions de l'équation (1) dans **K**; voir Nagell [2], p. 346–355 et [3], p. 176–179. J'ai continué mes recherches sur l'équation (1) dans les travaux [4] et [5]. Dans ces cinq travaux (dont le premier fut publié en 1928) j'ai résolu le problème complètement dans le cas d'un corps algébrique d'un rang $\leqslant 1$; il s'agit alors des corps quadratiques, des corps cubiques à discriminent négatif et des corps biquadratiques du premier rang, caracterisés par la propriété que tous les corps conjugués sont imaginaires. J'ai montré que le nombre de solutions de (1) dans un corps donné est limité dans ces cas, et j'en ai déterminé toutes les solutions.

En fait, le nombre de solutions de (1) est limité dans un corps algébrique quelconque, ainsi qu'il a été montré par S. Chowla en 1961; voir [6]. Sans connaître la démonstration de Chowla j'ai établi le même résultat en 1964; voir [4], Théorème 8. Les deux démonstrations, qui dépendent d'un théorème de Siegel, sont identiques. Cependant, la nature de cette démonstration est telle qu'elle ne donne aucun moyen pour déterminer les solutions. Dans mon travail [4] j'ai montré que le Théorème 8 n'est qu'un cas particulier d'un théorème beaucoup plus général; voir le Théorème 9 dans le travail en question. Du Théorème 9 il résulte, entre autres, que la somme de deux unités dans un corps algébrique donné ne peut avoir la même valeur que dans un nombre fini de cas.

2. Désignons par m le nombre de solutions de (1) dans un corps donné **K** sans compter la permutation de E et E_1. Supposons qu'on ait la solution

$$1+E+E_1=0. \tag{1}$$

[1] Les numéros figurant entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de ce travail.