ARKIV FÖR MATEMATIK Band 8 nr 7

1.68 11 3 Communiqué le 11 septembre 1968

Remarques sur une catégorie d'équations diophantiennes à deux indéterminées

Par TRYGVE NAGELL

§ 1. Sur la résolubilité de l'équation $y^2-1=z^p$

1. Dans un travail publié en 1921 j'ai étudié la possibilité de résoudre l'équation diophantienne

$$y^2-1=z^p \tag{1}$$

en nombres naturels y et z, lorsque p est un nombre premier $\geqslant 5$. Pour certaines catégories de nombres premiers p j'ai pu montrer dans le dit travail que cette équation n'a pas de solutions. La démonstration s'appuie sur des propriétés du corps quadratique engendré par $\sqrt{\varepsilon p}$, où $\varepsilon=+1$ ou $=-1$ suivant que $p\equiv 1$ ou $\equiv -1 \pmod 4$; voir Nagell [1][1]. Nous allons revenir sur une partie de ce travail plus loin dans le numéro 3.

Ensuite en 1935, par une autre méthode très simple, j'ai pu établir le résultat suivant (voir Nagell [2]):

Théorème 1. *Si p est un nombre premier $\geqslant 5$, qui n'est pas $\equiv 1$ (mod 8), l'équation (1) n'admet aucune solution en nombres naturels y et z.*

Vu que ce résultat semble être resté inconnu je me permets d'en recapituler la démonstration.

On voit aisément que le nombre z dans (1) est nécessairement pair, abstraction faite de la solution $y=0$, $z=-1$. En effet, si z est impair, cette équation entraîne

$$y-1=a^p, \quad y+1=b^p,$$

où a et b sont des nombres naturels, tels que $ab=z$. Donc

$$a^p-b^p=-2,$$

d'où résulte $a=-1$, $b=1$. Si z est pair on aura

$$y\mp 1=2a^p, \quad y\pm 1=2^{p-1}b^p,$$

où a et b sont des nombres naturels, tels que $2ab=z$, donc

$$a^p-2^{p-2}b^p=\mp 1. \tag{2}$$

[1] Les numéros figurant entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de ce mémoire.