ARKIV FÖR MATEMATIK Band 3 nr 54

Communiqué le 10 septembre 1958

Sur une classe d'équations exponentielles

Par TRYGVE NAGELL

§ 1

1. Soient donnés les nombres entiers positifs, premiers entre eux deux à deux,

$$A, M_1, M_2, \ldots, M_m, B, N_1, N_2, \ldots, N_n, C, \tag{1}$$

et considérons l'équation exponentielle

$$A\, M_1^{x_1} M_2^{x_2} \ldots M_m^{x_m} - B\, N_1^{y_1} N_2^{y_2} \ldots N_n^{y_n} = C, \tag{2}$$

où les inconnus $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots y_n$

doivent être des nombres entiers $\geqslant 0$.
Nous allons établir le résultat suivant:

Théorème 1. *L'équation diophantienne* (2) *n'a qu'un nombre fini de solutions en nombres entiers* $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n \geqslant 0$.
Démonstration: Posons, pour $i = 1, 2, \ldots, m$,

$$x_i = \mu_i + 3\varkappa_i,$$

et, pour $i = 1, 2, \ldots, n$,
$$y_i = \nu_i + 3\lambda_i,$$

où μ_i et ν_i sont des entiers tels que $0 \leqslant \mu_i \leqslant 2$, $0 \leqslant \nu_i \leqslant 2$. Si nous posons ensuite

$$A_1 = A \cdot M_1^{\mu_1} M_2^{\mu_2} \ldots M_m^{\mu_m}$$

$$B_1 = B \cdot N_1^{\nu_1} N_2^{\nu_2} \ldots N_n^{\nu_n},$$

$$X = M_1^{\varkappa_1} M_2^{\varkappa_2} \ldots M_m^{\varkappa_m},$$

$$Y = N_1^{\lambda_1} N_2^{\lambda_2} \ldots N_n^{\lambda_n},$$

l'équation (2) sera remplacée par 3^{m+n} équations de la forme

$$A_1 X^3 - B_1 Y^3 = C. \tag{3}$$

D'après un théorème bien connu d'*Axel Thue* chacune des équations (3) n'admet qu'un nombre limité de solutions en nombres entiers X et Y, quand A_1, B_1 et C sont donnés. Ainsi le théorème 1 se trouve demontré.