Communiqué le 10 Septembre 1958 par T. Nagell

Sur l'approximation diophantienne des formes linéaires

Par Nikola Obrechkoff

On doit à Dirichlet le théorème classique suivant :

Désignons par $t \geqslant 1$ un nombre réel et par $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\varkappa$ $\varkappa$ nombres réels arbitraires. Alors il existe $\varkappa$ nombres entiers $x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa$, non tous nuls, tels que l'on ait

$$\left.\begin{aligned} &|\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \cdots + \omega_\varkappa x_\varkappa - y| < \frac{1}{t_\varkappa}, \\ &|x_\mu| \leqslant t, \quad \mu = 1, 2, \ldots, \varkappa \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

où y est un nombre entier convenable.

Dans [1] on a toujours le signe d'inégalité. Dans ce travail nous démontrons une inégalité précise et générale.

1. *Considérons la forme linéaire*

$$f = \sum_{\mu=1}^{n_1} a_{1\mu} x_\mu^{(1)} + \sum_{\mu=1}^{n_2} a_{2\mu} x_\mu^{(2)} + \cdots + \sum_{\mu=1}^{n_p} a_{p\mu} x_\mu^{(p)},$$

où $a_{1\mu}, a_{2\mu}, \ldots, a_{p\mu}$ sont des nombres réels arbitraires et $n_1, n_2, \ldots, n_p$ sont des nombres entiers et positifs. Soit encore $m_1, m_2, \ldots, m_p$ des nombres entiers et positifs. Alors il existe des nombres entiers $x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)}, \ldots, x_{n_\nu}^{(\nu)}$, $\nu = 1, 2, \ldots, p$, non tous nuls, les nombres de chaque groupe $x_\mu^{(\nu)}$, $1 \leqslant \mu \leqslant n_\nu$, étant du même signe (c'est-à-dire non négatifs ou non positifs) et tels que l'on ait

$$\left.\begin{aligned} &|f - y| \leqslant \frac{1}{\mu}, \quad M = (n_1 m_1 + 1)(n_2 m_2 + 1) \ldots (n_p m_p + 1), \\ &|x_\mu^{(\nu)}| \leqslant m_\nu, \quad 1 \leqslant \mu \leqslant n_\nu, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant p. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

L'égalité dans (2) *est atteinte.*

Dans la démonstration nous appliquons le principe de Dirichlet sous la forme suivante : Supposons que les nombres réels

$$0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, 1,$$

sont rangés par ordre de la valeur non décroissante. Alors ils existent au moins deux nombres voisins, dont la différence est plus petite que $1/(n+1)$, ou tous ces nombres sont les nombres suivants