ARKIV FÖR MATEMATIK Band 3 nr 30

Mitgeteilt am 11. April 1956 durch T. NAGELL und OTTO FROSTMAN

Über eine Klasse von kubischen diophantischen Gleichungen mit drei Unbekannten

Von STIG CHRISTOFFERSON

§ 1. Einleitung

Wir betrachten die diophantische Gleichung

$$u^3 + a b^2 v^3 + a^2 b w^3 - 3 a b u v w = C, \tag{1}$$

wo a und b natürliche Zahlen sind, deren Produkt $ab > 1$ durch kein Primzahlquadrat teilbar ist, und C eine natürliche Zahl ist.

Wenn die ganzen rationalen Zahlen u, v, w die Gleichung (1) befriedigen, so wird die Zahl

$$\omega = u + v\alpha + w\beta, \tag{2}$$

mit

$$\alpha = \sqrt[3]{a b^2} \quad \text{und} \quad \beta = \sqrt[3]{a^2 b},$$

eine Lösung von (1) genannt. α und β sollen die reellen dritten Wurzeln sein, und sie sind also nach der Voraussetzung über a und b positive irrationale Zahlen. Es ist keine Einschränkung, wenn wir im folgenden $a > b$ voraussetzen, dann wird $\alpha < \beta$. Eine Lösung ω heisst grösser als eine andere Lösung ω_1, wenn von der Zahlen ω und ω_1 die erstere die grössere ist, und umgekehrt nennt man dann ω_1 kleiner als ω. Zwei Lösungen ω und ω_1 heissen gleich, wenn $\omega = \omega_1$, was nur für $u = u_1$, $v = v_1$, $w = w_1$ vorkommt.

In dem reinen kubischen Zahlkörper $\boldsymbol{K}(\alpha)$ ist die Form

$$F(u, v, w) = u^3 + a b^2 v^3 + a^2 b w^3 - 3 a\, b u v w$$

einfach die Norm der Zahl $\omega = u + v\alpha + w\beta$, und wenn ϱ und ϱ^2 die primitiven kubischen Einheitswurzeln sind, $\varrho^2 + \varrho + 1 = 0$, wird, mit

$$\omega' = u + v\alpha\varrho + w\beta\varrho^2 \quad \text{und} \quad \omega'' = u + v\alpha\varrho^2 + w\beta\varrho, \tag{3}$$

$$F(u, v, w) = \omega\,\omega'\,\omega''.$$

Wir setzen

$$\begin{gathered} \omega'\,\omega'' = \bar{\omega} = \bar{u} + \bar{v}\alpha + \bar{w}\beta, \\ \bar{u} = u^2 - a b v w, \quad \bar{v} = a w^2 - u v, \quad \bar{w} = b v^2 - u w. \end{gathered} \tag{4}$$