Communiqué le 14 avril 1954 par OTTO FROSTMAN

Sur la fonction d'appui des ensembles convexes dans un espace localement convexe

Par LARS HÖRMANDER

Cette note a son origine dans RÅDSTRÖM [4], où l'on démontre que certaines classes d'ensembles convexes dans un espace normé E, munies de la définition usuelle de l'addition et de la multiplication avec des scalaires et distanciées par la distance de Hausdorff, sont isomorphes à des cônes convexes dans un espace normé N.

Si la dimension de E est finie, ce théorème est essentiellement dû à Minkowski, car un tel isomorphisme est donné par la correspondence entre les ensembles convexes et leurs fonctions d'appui, qui sont définies dans l'espace dual E' de E et normées par le maximum sur la sphère unité dans E'.

Nous allons démontrer ici que les théorèmes classiques sur la fonction d'appui sont encore valables si la dimension de E n'est pas nécessairement finie. Les résultats n'offrent peut-être pas beaucoup de nouveau, mais autant que nous le savons, les démonstrations ne se trouvent nulle part. En appliquant les résultats démontrés par la suite nous obtiendrons une généralisation et une précision du théorème cité de Rådström.

Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe réel. Nous désignerons par E' l'espace dual de E, et la forme linéaire $y \in E'$ sera écrite $\langle x, y\rangle$ $(x \in E)$. De la théorie des espaces localement convexes nous citons le lemme suivant:

Lemme. *Dans un espace localement convexe, tout ensemble convexe fermé K est l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent.*

Rappelons qu'un demi-espace fermé est défini par une inégalité de la forme $\langle x, y\rangle \leq \alpha$, dans laquelle $y \in E'$ et α est réel. — Le lemme se trouve dans BOURBAKI [1], p. 73, Corollaire 1.

Définition. *Etant donné un ensemble convexe fermé non vide K dans E on définit sa fonction d'appui $H(y)$, $y \in E'$, par*

$$H(y) = \sup_{x \in K} \langle x, y\rangle. \tag{1}$$

$H(y)$ est évidemment partout $> -\infty$. Rappelons qu'un ensemble $A \subset E$ est faiblement borné si $\langle x, y\rangle$ est borné quand $x \in A$ pour chaque y fixé dans E'.