ARKIV FÖR MATEMATIK Band 3 nr 11

Mitgeteilt am 14. April 1954 durch T. Nagell und Otto Frostman

Zur Axiomatik endlicher Gruppen

Von Bengt Stolt

§ 1. Einleitung

In der Axiomatik endlicher Gruppen haben Baer und Levi solche Axiomensysteme behandelt, die die sogenannten allgemeinen Axiome enthalten; siehe [1]. Lorenzen erweitert die Menge der zu betrachtenden Axiome, indem er die Eins-Existenzaxiome und die allgemeinen Inversaxiome aufstellt; siehe [2]. Ferner habe ich die Eins-Unitätsaxiome und die speziellen Inversaxiome aufgestellt; siehe [3] und [4]. Weder in [2] noch in [3] oder [4] wird die Axiomatik endlicher Gruppen behandelt.

In [5] habe ich sämtliche Systeme aufgestellt, die aus den von Lorenzen betrachteten Axiomen gebildet werden können und nur für eine zugrundeliegende endliche Menge vollständig und irreduzibel sind. Es ist das Ziel vorliegender Arbeit, sämtliche vollständigen irreduziblen Axiomensysteme zu bestimmen, die aus den von Stolt betrachteten Axiomen gebildet werden können und nur dann vollständig sind, wenn die zugrundeliegende Menge endlich ist und die in dieser Menge definierte Verknüpfung eindeutig ist.

Den sämtlichen Systemen dieser Arbeit liegt eine endliche abstrakte Menge zugrunde. Für Bezeichnungen wird auf [3] verwiesen. Es wird hervorgehoben, dass, wenn eines der Axiome $l\varepsilon.J$, $lv.J$, $r\varepsilon.J$ und $rv.J$ besteht, es zwei Elemente c und d gibt, die eine gewisse Gleichung erfüllen. Wenn mehrere dieser Axiome bestehen, werden wir annehmen, dass c und d in allen Gleichungen dieselben sind.

§ 2. Hilfssätze

Zuerst wollen wir die folgenden Hilfssätze beweisen.

Hilfssatz 1. *Wenn A, E und U bestehen, hat jedes Element a eine Potenz a^m, die idempotent ist.*

Beweis: Wenn a beliebig ist, ist es möglich, der Reihe nach die Produkte $a\,a = a^2$, $a\,a^2 = a^3$, $a\,a^3 = a^4, \ldots$ zu bilden. Weil die zugrundeliegende Menge endlich ist, kommt man zu einer Gleichung $a\,a^\lambda = a^k$, wo $k \leqq \lambda$ ist. Es ist nun möglich, $a^2\,a^{\lambda-1} = a^k$; $a^3\,a^{\lambda-2} = a^k, \ldots$ zu bilden, bis man nach $a^h\,a^k = a^k$ kommt. Aus der letzten Gleichung ergibt sich

$$a^h\,a^{2k} = a^h\,(a^k\,a^k) = (a^h\,a^k)\,a^k = a^k\,a^k = a^{2k}.$$

Indem man fortfährt, kommt man zur Gleichung $a^h\,a^{hk} = a^{hk}$.