ARKIV FÖR MATEMATIK Band 3 nr 7

Mitgeteilt am 13. Januar 1954 durch T. Nagell

Über irreduzible Axiomensysteme, die eine endliche abstrakte Gruppe bestimmen

Von Bengt Stolt

§ 1. Einleitung

Die Axiomatik endlicher Gruppen ist nur von wenigen Verfassern behandelt. U. a. wollen wir Baer und Levi erwähnen, die einige Axiome aufstellen, die die allgemeinen Axiome genannt werden; siehe [1]. Sie bestimmen sämtliche vollständigen irreduziblen Systeme, die aus diesen Axiomen gebildet werden können, und sie bestimmen auch diejenigen Systeme, die nur vollständig sind, wenn die zugrundeliegende Menge endlich ist.

Lorenzen behandelt nicht nur die allgemeinen Axiome sondern auch die sogenannten Eins-Existenzaxiome und die allgemeinen Inversaxiome. Er stellt sämtliche vollständigen irreduziblen Systeme auf, die aus diesen Axiomen gebildet werden können und höchstens vier Axiome enthalten; siehe [2]. In meiner Dissertation habe ich sämtliche vollständigen irreduziblen Systeme bestimmt, die aus den von Lorenzen betrachteten Axiomen gebildet werden können, siehe [3], S. 56.

Weder in [2] noch in [3] wird der Fall behandelt, wo die zugrundeliegende Menge endlich ist. Es ist nun das Ziel der vorliegenden Arbeit, sämtliche vollständigen irreduziblen Systeme zu bestimmen, die aus den von Lorenzen betrachteten Axiomen gebildet werden können und nur vollständig sind, wenn die zugrundeliegende Menge endlich ist. Für Bezeichnungen und Hilfssätze wird an [3] verwiesen.

§ 2. Hilfssätze

Zunächst werden wir zwei Hilfssätze beweisen, die Verallgemeinerungen eines Satzes von Baer–Levi [1], S. 11, sind.

Hilfssatz 1. *Wenn $lE.J$ und $rU.J$ bestehen, bestehen auch $lU.J$ und $rE.J$.*

Beweis: Wir nehmen an, dass d ein Element mit $lE.J$ und $rU.J$ ist, und betrachten die Produkttafel der zugrundeliegenden endlichen Menge. Nach $lE.J$ kommt d in jeder Kolonne mindestens einmal vor; siehe [3], S. 16. Die Produkttafel enthält also d mindestens n mal. Aber nach $rU.J$ kommt d in jeder Zeile höchstens einmal vor; siehe [3], S. 17. Folglich enthält die Produkttafel d höchstens n mal. Sie enthält also d genau n mal. Jede Zeile und Kolonne enthält dann d genau einmal. Hieraus folgt die Gültigkeit von $lU.J$ und $rE.J$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Wir beweisen auch