HILBERTS SATZ ÜBER FLÄCHEN KONSTANTER NEGATIVER KRÜMMUNG.

VON

LUDWIG BIEBERBACH

in BERLIN.

Im zweiten Bande der »Transactions of the American mathematical society» hat HILBERT seinen Beweis für den bereits von KLEIN[1] vermuteten Satz veröffentlicht, wonach die hyperbolische nichteuklidische ebene Geometrie sich nicht als Ganzes auf einer Fläche des dreidimensionalen Euklidischen Raumes verwirklichen lässt. An den Hilbertschen Beweis schliessen sich verschiedene Versuche von Verbesserungen und Vereinfachungen an, auf die ich nachher noch zu sprechen komme. Der unmittelbare Anlass meiner Darlegungen ist eine Arbeit von LIEBMANN im Band 22 der Mathematischen Zeitschrift, auf die ich gleichfalls später näher eingehen werde.

In präziser Fassung lautet der von Hilbert etwas unbestimmt ausgesprochene Satz: *Es gibt keine Fläche des dreidimensionalen Euklidischen Raums, die in endlicher auf der Fläche gemessener Entfernung frei von Singularitäten ist und auf der durch den umgebenden Euklidischen Raum die hyperbolische Massbestimmung induziert wird.* Es sollen sich also mit anderen Worten alle Linien der Fläche zu beliebig grossen Längen auf der Fläche verfolgen lassen. Frei von Singularitäten aber nenne ich eine Fläche, wenn sie in der Umgebung eines jeden ihrer Punkte regulär ist, d. h. wenn der Vektor $\mathfrak{x}(u, v)$ der Flächenpunkte samt den Ableitungen der drei ersten Ordnungen bei passender Wahl der Parameter in der Umgebung der betreffenden Stelle eindeutig und stetig erklärt ist, und wenn daselbst überdies $\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v \neq 0$ ist.[2] Bekanntlich besitzt die hyperbolische Mass-

[1] 1871 Vergl Ges. Abh. I. S. 249.

[2] So bezeichnen wir das vektorielle Produkt von $\mathfrak{x}_u$ und $\mathfrak{x}_v$.