SUR UNE FAMILLE DE POLYNÔMES ET CERTAINS DÉVELOPPEMENTS DE LA FONCTION $x^{-m} e^x$.

PAR

RENÉ LAGRANGE.

à DIJON.

Introduction Considérons la fonction e^x et son développement en série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Au lieu de celui-ci, considérons la série voisine $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{m+n}}{\Gamma(m+n+1)}$, et étudions la différence

$$e^x - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{m+n}}{\Gamma(m+n+1)}. \tag{1}$$

Plus généralement encore, remplaçons x par xy, et multiplions la différence en question par $\Gamma(m+1)y^{-m-1}$. L'expression

$$\frac{\Gamma(m+1)e^{xy}}{y^{m+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n-1}x^{m+n}}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)} \tag{2}$$

ainsi formée apparaît comme représentant une erreur résultant de ce que m diffère de 0. Bien entendu, x, y, m sont des nombres complexes quelconques. D'autre part, cette différence s'écrit

$$x^{m+1}\int_0^{\infty} e^{-xyu}(1+u)^m\,du = x^{m+1}\varphi(xy, -m), \tag{3}$$

où

$$\varphi(x, \alpha) = \int_0^{\infty} e^{-xu}(1+u)^{-\alpha}\,du$$