SUR LES FONCTIONS INDÉFINIMENT DÉRIVABLES.

PAR

S. MANDELBROJT.

à PARIS.

Introduction. — Enoncé du théorème fondamental.

Nous donnons, dans ce mémoire, un théorème concernant les fonctions indéfiniment dérivables, les plus générales, définies dans un intervalle fermé, borné. Nous démontrons notamment que toute fonction indéfiniment dérivable peut, dans un tel intervalle, être décomposée en une somme de deux fonctions dont chacune appartient à une classe quasi analytique.

Nous disons qu'une fonction $f(x)$ indéfiniment dérivable, dans l'intervalle fermé $[a, b]$, est du *type fortement quasi analytique,* si, en posant $m_n = \max|f^{(n)}(x)|$, $(a \leq x \leq b)$, la série $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{m_n}}$ diverge. La classe $\{m_n\}_I$ de fonctions indéfiniment dérivables sur $I \equiv [a, b]$, (à chaque fonction φ de cette classe correspond une constante $\lambda > 0$ telle que les inégalités $|\varphi^{(n)}(x)| < \lambda^n m_n$, $(a \leq x \leq b;\ n \geqq 1)$ ont lieu) est alors une classe quasi analytique. La quasi analyticité d'une telle classe serait en effet déjà assurée par la divergence de la série $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{\bar{m}_n}}$, où $\bar{m}_n$ a le sens suivant: on pose pour $r > 0$ et pour les entiers positifs n

$$T(r) = \overline{\text{borne}}_{n \geq 1} \frac{r^n}{m_n},$$

$$\bar{m}_n = \max_{r \geq 0} \frac{r^n}{T(r)}{}^{1}.$$

[1] Voir la note au bas de la page 25.