ENSEMBLES EXCEPTIONNELS.

Par

ARNE BEURLING.

à UPSAL.

D'après un théorème fondamental que l'on doit à M. LEBESGUE, la primitive d'une fonction sommable $f(x)$ possède presque partout une dérivée unique et finie. Par *l'ensemble exceptionnel* E_f de f nous entendrons l'ensemble où la dérivée symétrique

$$\lim_{h=0} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(x)\, dx$$

n'existe pas finie. Sa mesure linéaire $m E_f$ est donc nulle, et ceci est la seule propriété connue relative à la métrique de cet ensemble.

Dans le présent mémoire nous allons étudier un cas particulier de la question suivante: caractériser la métrique de l'ensemble exceptionnel E_f si $f(x)$ est soumis à une certaine condition qui implique la sommabilité, par exemple si une intégrale de la forme

$$\int_a^b |f(x+h) - f(x)|^p \, dx, \qquad p \geq 1,$$

s'annule d'un certain ordre pour $h \to 0$.

Nous allons traiter ce problème à l'aide de séries de Fourier. Considérons une fonction sommable $f(\theta)$ de période 2π et sa série de Fourier

$$(1) \qquad f(\theta) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta).$$