ÜBER DIE FOURIERKOEFFIZIENTEN EINER STETIGEN FUNKTION.

(Aus einem Brief an Herrn A. WIMAN.)

VON

TORSTEN CARLEMAN

in UPPSALA.

Vor einiger Zeit haben Sie die Frage aufgeworfen, ob die Ordnung des zu einem stetigen Kern gehörigen FREDHOLM'schen Nenners die obere Schranke 2 erreichen kann. Ich werde im folgenden ein Beispiel angeben, für das diese Grenze tatsächlich erreicht wird. Das Beispiel hängt übrigens mit einer Konvergenzfrage betreffend die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion zusammen, welche vielleicht auch an und für sich nicht ohne Interesse ist.

Es sei $f(x)$ eine im Intervalle $(0, 2\pi)$ definierte Funktion, deren Quadrat integrierbar ist. Bekanntlich konvergiert die Reihe

$$\sum (a_n^2 + b_n^2),$$

wo a_n und b_n die Fourierkoeffizienten

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos n x\, dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin n x\, dx$$

bedeuten. Nach dem FISCHER-RIESZ'schen Satze kann man keinen Exponenten $2 - \delta$ $(\delta > 0)$ finden, so dass

$$\sum (|a_n|^{2-\delta} + |b_n|^{2-\delta})$$