ESSAI SUR LES FONCTIONS Θ DU QUATRIÈME DEGRÉ.

PAR

PAUL APPELL

à PARIS.

Deuxième partie.

XIV. *Sur un problème préliminaire d'algèbre.* Dans la première partie de ce travail, j'ai considéré des fonctions du type général suivant. Soient $x_1, x_2, \ldots x_n$ des variables complexes et ω une constante donnée dont la partie réelle est négative. Les fonctions considérées sont des fonctions uniformes F, holomorphes ou méromorphes, de $x_1, x_2, \ldots x_n$, qui admettent, par rapport à chaque variable, la période $2\pi i$ et qui vérifient, en outre, la relation

$$(35) \qquad F(x_1 + \omega,\ x_2 + x_1,\ x_3 + x_2,\ \ldots,\ x_n + x_{n-1}) = e^{-\alpha x_n} F(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),$$

où α est un entier positif, négatif ou nul. En ajoutant une variable de plus x_{n+1}, on peut toujours ramener le cas général au cas où α est nul; il suffit en effet de poser

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) = e^{\alpha x_{n+1}} F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

pour que cette fonction admette la période $2\pi i$ aussi par rapport à x_{n+1} et vérifie la relation

$$(36) \qquad \Phi(x_1 + \omega, x_2 + x_1, \ldots, x_{n+1} + x_n) = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}).$$

Pour le développement de cette théorie et en particulier pour l'étude de la transformation, il importe de résoudre la question suivante, dans laquelle ω est une constante quelconque différente de zéro:

Former toutes les fonctions uniformes f de n variables complexes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vérifiant la relation unique

$$(37) \qquad f(x_1 + \omega, x_2 + x_1, x_3 + x_2, \ldots, x_n + x_{n-1}) = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n).$$