ORDRE DES POINTS SINGULIERS DE LA SÉRIE DE TAYLOR.

PAR

EUGÈNE FABRY

À MONTPELLIER.

1. M. HADAMARD a défini l'ordre d'une série de Taylor $f(z)=\sum_0^\infty a_n z^n$, sur le cercle de convergence, dont le rayon est supposé égal à 1 (Journal de Math. pures et appliquées 1892, p. 165). Si la fonction $f(e^{\vartheta i})$ est finie et continue sur un arc C, c'est à dire entre deux valeurs de ϑ; on dit qu'elle est à écart fini, si les modules des deux intégrales $\int nf(e^{\vartheta i})\cos n\vartheta\, d\vartheta$ et $\int nf(e^{\vartheta i})\sin n\vartheta\, d\vartheta$ restent inférieurs à un nombre I déterminé, sur l'arc C, et sur tout arc intérieur à C; quelque soit n, qui peut augmenter indéfiniment.

Si $\varphi(z)=\sum\frac{a_n}{n^{\omega+\varepsilon}}z^n$ est à écart fini sur un arc C (ce qui suppose $\varphi(e^{\vartheta i})$ fini et continu), pour toute valeur positive de ε; $\varphi(z)$ n'étant pas à écart fini lorsque $\varepsilon<0$; ω est l'ordre de $f(z)$ sur cet arc. On en déduit l'ordre en un point du cercle de convergence, en supposant l'arc C infiniment petit. L'ordre sur le cercle de convergence est le plus grand des ordres en ses points singuliers, il est égal à la plus grande limite de $\frac{L|na_n|}{Ln}$. Nous supposerons cet ordre ω fini.

Dans les cas les plus simples, l'ordre en un point singulier est égal au degré d'infinitude. Mais M. BOREL a montré, par un exemple, que l'ordre peut être supérieur (Séries à termes positifs, p. 77). J'ai montré (C. R. 6 décembre 1909) qu'il était nécessaire de préciser ces définitions. Je me propose ici de définir, dans tous les cas, l'ordre d'infinitude en un point singulier, et l'ordre d'infinitude dans le cercle de convergence; et de montrer que ces deux définitions doivent reposer sur des principes différents. J'étudierai ensuite les divers cas qui peuvent se présenter, et les propriétés qui en résultent.