NOTE SUR LES ZÉROS DE LA FONCTION $\zeta(s)$ DE RIEMANN

PAR

J.-P. GRAM

à COPENHAGUE.

Le génie d'Abel se manifesta non seulement dans la force gigantique qu'il sût appliquer pour approfondir les problèmes qu'il prit pour objets de ses recherches, mais aussi bien dans l'intuition remarquable qui lui fit saisir précisement ces problèmes dont la solution devait conduire à des résultats féconds pour l'avenir. Il ne doit donc pas nous étonner de trouver Abel dans la liste des analystes qui ont préparé la terre pour la théorie de la fonction Zéta, une des plus remarquables acquisitions de l'analyse moderne.

A la vérité les Oeuvres d'Abel renferment plusieurs mémoires concernant cette matière; surtout ceux qui portent les numéros II et IV du Tome 1, et I du Tome 2 de l'édition nouvelle contiennent assez de choses dignes d'intérêt. Sans entrer dans des détails je rappellerai particulièrement l'attention sur deux formules fondamentales qu'on y trouve.

La première est l'égalité qui sous sa forme moderne s'écrit comme suit:

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\,dx, \tag{I}$$

sur laquelle Abel est conduit en cherchant une expression des nombres de Bernoulli au moyen d'intégrales définies. Comme on sait, c'est cette intégrale que Riemann a prise pour départ de sa théorie générale et plus