SUR LES FONCTIONS QUI ADMETTENT UN THÉORÈME D'ADDITION

PAR

PAUL PAINLEVÉ

à PARIS.

1. Comme point de départ de sa doctrine des fonctions elliptiques, WEIERSTRASS a pris le théorème suivant: *Toute fonction $x = \varphi(u)$ qui admet un théorème d'addition se ramène algébriquement à une fonction uniforme, méromorphe et doublement périodique de u, ou à une dégénérescence d'une telle fonction.* Autrement dit, $\varphi(u)$ est une fonction algébrique de $\wp(u, g_2, g_3)$ ou de e^{gu} ou de u.

En tête de sa théorie des fonctions abéliennes, WEIERSTRASS a inscrit une proposition analogue:

Tout système de n fonctions (indépendantes[1]) à n variables qui admet un théorème d'addition est une combinaison algébrique de n fonctions abéliennes (ou dégénérescences) à n arguments et aux mêmes périodes.

Cette proposition, qui a été souvent invoquée par les élèves de WEIERSTRASS, n'a pas seulement une importance considérable dans la théorie des fonctions abéliennes; elle intervient encore dans de nombreuses questions intéressant les surfaces algébriques, les équations différentielles, etc.

Malheureusement, la démonstration de l'illustre géomètre allemand n'a été ni enseignée[2] ni publiée; il n'en subsiste aucune trace dans ses manuscrits; elle est aujourd'hui perdue.

---

[1] J'entends par là que les n fonctions ne sont liées par aucune relation identique.

[2] Dans le seul de ses cours (cours manuscrit) où il soit fait allusion à cette démonstration, WEIERSTRASS précise le théorème et annonce qu'il l'établira dans les leçons suivantes. Mais le manuscrit porte alors que WEIERSTRASS, malade, a interrompu son cours; quand il le reprend quelques semaines plus tard, il poursuit le développement de la théorie des fonctions abéliennes, sans revenir sur le théorème en question.