

ÜBER GITTERPUNKTE IN CONVEXEN KÖRPERN UND EIN DAMIT ZUSAMMENHÄNGENDES EXTREMALPROBLEM.

VON

CARL LUDWIG SIEGEL

in PRINCETON, N. J.

Bekanntlich ist im n -dimensionalen Raum für jeden zum Nullpunkt symmetrischen convexen Körper $\mathfrak{K}$, der keinen vom Nullpunkt verschiedenen Gitterpunkt enthält, das Volumen V höchstens gleich 2^n . Wie das Beispiel eines zu den Achsen parallel orientierten Würfels zeigt, lässt dieser Minkowskische Satz in bezug auf die obere Schranke für V bei beliebigen Körpern keine Verschärfung zu. Betrachtet man aber aus der Menge der Körper $\mathfrak{K}$ nur einen Teil, wie etwa die n -dimensionalen Ellipsoide, so ergibt sich die Aufgabe, in dieser Teilmenge eine möglichst günstige obere Schranke für V zu finden.

Das naturgemässe analytische Werkzeug für die Untersuchung des Zahlengitters sind die n -fachen Fourierschen Reihen; mit ihrer Vollständigkeitsrelation beweist man für convexe Körper, die keinen Gitterpunkt ausser dem Nullpunkt enthalten, die Beziehung

$$(1) \quad 2^n = V + V^{-1} \sum_{\mathfrak{l} \neq 0} \left| \int_{\mathfrak{K}} e^{\pi i \mathfrak{l} \mathfrak{x}} d\mathfrak{x} \right|^2,$$

wo $\mathfrak{l} = (l_1, \dots, l_n)$ alle vom Nullpunkt verschiedenen Gitterpunkte durchläuft und zur Abkürzung $dx_1 \dots dx_n = d\mathfrak{x}$, $l_1 x_1 + \dots + l_n x_n = \mathfrak{l} \mathfrak{x}$ gesetzt ist. Dies setzt den Minkowskischen Satz in Evidenz.

Der zu (1) führende Ansatz lässt sich bei speciellen Typen von Körpern zur Verbesserung der oberen Schranke für V verwenden. Insbesondere erhält man für Ellipsoide die obere Schranke $\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^n$ bei hinreichend grossem n . Al-