QUELQUES REMARQUES SUR LES FONCTIONS ENTIÈRES

PAR

JULIUS PETERSEN

À COPENHAGUE.

Soit $\varphi(z)$ une fonction uniforme, ne possédant aucun point essentiel à distance finie. Posons

$$\log \varphi(z) = \log R + \theta i, \tag{1}$$

R désignant le module et θ l'argument de la fonction; l'on a alors

$$\frac{\partial \log R}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial y}; \qquad \frac{\partial \log R}{\partial y} = -\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

ou

$$\frac{1}{R}\left(\frac{\partial R}{\partial r}\frac{x}{r} - \frac{\partial R}{\partial \theta}\frac{y}{r^2}\right) = \frac{\partial \theta}{\partial r}\frac{y}{r} + \frac{\partial \theta}{\partial \theta}\frac{x}{r^2},$$

$$\frac{1}{R}\left(\frac{\partial R}{\partial r}\frac{y}{r} + \frac{\partial R}{\partial \theta}\frac{x}{r^2}\right) = -\frac{\partial \theta}{\partial r}\frac{x}{r} + \frac{\partial \theta}{\partial \theta}\frac{y}{r^2},$$

formules d'où l'on tire

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = -\frac{1}{Rr}\frac{\partial R}{\partial \theta}; \qquad \frac{\partial \theta}{\partial \theta} = \frac{r}{R}\frac{\partial R}{\partial r}; \tag{2}$$

$$d\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial \log R}{\partial \theta}\,dr + r\frac{\partial \log R}{\partial r}\,d\theta. \tag{3}$$

Si l'on intègre cette dernière expression, en prenant pour chemin d'intégration une courbe fermée, l'on obtient, comme l'on sait, pour résultat $2\pi n$, où n désigne le nombre des zéros diminué de celui des infinis, respectivement situés dans la partie du plan limitée par la courbe. Si la courbe est une circonférence ayant l'origine pour centre, on a $dr = 0$, et

$$n = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial \log R}{\partial r}\, r\, d\theta. \tag{4}$$

Acta mathematica. 23. Imprimé le 21 octobre 1899.