ÜBER EINEN SATZ DES HERRN SERGE BERNSTEIN.

VON

MARCEL RIESZ

in STOCKHOLM.

(Aus zwei Briefen an Herrn G. MITTAG-LEFFLER.)

I.

...Neulich haben wir uns über einen Satz von Herrn S. BERNSTEIN unterhalten. Ich kann Ihnen jetzt für denselben einen ganz elementaren Beweis mitteilen, der auf der LAGRANGEschen Interpolationsformel beruht.

Ich werde zunächst den zu beweisenden Satz folgendermassen aussprechen.

Es sei $f(x)$ ein Polynom von höchstens n-tem Grade mit beliebigen komplexen Koeffizienten

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

Es bedeute L das Maximum des absoluten Betrages von $f(x)$ auf der Strecke $(-1, +1)$. Bezeichnen wir dann mit ξ einen beliebigen Punkt, der ausserhalb[1] der Strecke $(-1, +1)$ liegt, so ist

$$|f(\xi)| \leqq L(A+B)^n, \tag{1}$$

wo A und B die Halbachsen der Ellipse bedeuten, die durch den Punkt ξ geht und die Punkte -1 und $+1$ zu Brennpunkten hat.

Herr BERNSTEIN[2] beweist für Polynome mit reellen Koeffizienten

$$|f(\xi)| < L(A+B)^n \qquad (n > 0) \tag{2}$$

[1] Der Satz bleibt richtig, wenn ξ auf der Strecke $(-1, +1)$ gelegen ist, wird aber in diesem Falle trivial, da jetzt die Ellipse in die (doppelte) Strecke $(-1, +1)$ übergeht und $A+B=1$ wird.

[2] S. BERNSTEIN: (I), Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes de degré donné, Mémoires publiés par la Classe des Sciences de l'Académie de Belgique, Bd. 4, 1912, S. 13—15. In dieser Arbeit wird der Satz nur für reelle ξ bewiesen. Der allgemeine Beweis befindet sich in der Arbeit (II): Sur une propriété des polynomes, Bulletin de la Soc. Math. de Kharkof, Bd. 14.