EIN BEITRAG ZUR THEORIE DES LEGENDRE'SCHEN POLYNOMS

VON

DAVID HILBERT

in KÖNIGSBERG i. Pr.

Die vorliegende Mittheilung beschäftigt sich mit der Frage nach dem kleinsten von o verschiedenen Werthe, dessen das Integral

$$I = \int_\alpha^\beta [f(x)]^2 dx \qquad (\beta > \alpha)$$

fähig ist, wenn man für $f(x)$ eine ganze rationale Function $n - 1^{\text{ten}}$ Grades mit *ganzzahligen* Coefficienten wählt und wenn man unter α und β gegebene Constanten versteht. Wird

$$f(x) = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$$

gesetzt, so geht das Integral in eine definite quadratische Form der n Veränderlichen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ über:

$$I = \sum^{i,k} \alpha_{ik} a_i a_k, \qquad (i,k = 1,2,\ldots,n)$$

deren Coefficienten durch die Formel

$$\alpha_{ik} = \int_\alpha^\beta x^{2n-i-k} dx = \frac{\beta^{2n-i-k+1} - \alpha^{2n-i-k+1}}{2n - i - k + 1}$$

gegeben sind.

Um eine obere Grenze für das Minimum dieser quadratischen Form I zu erhalten bedarf es der Berechnung ihrer Discriminante

$$D_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$