SUR LES SÉRIES DE TAYLOR.

Lettre adressée à l'éditeur

PAR

EMILE BOREL

à PARIS.

Monsieur,

Vous avez bien voulu me demander de vous indiquer comment on pourrait, en partant des éléments, démontrer les théorèmes sur les séries de TAYLOR que j'ai énoncés dans les Comptes Rendus, en décembre 1896 (en esquissant une démonstration reposant sur deux mémoires relatifs aux séries divergentes, parus en 1896 dans le Journal de M. JORDAN). Je suis très heureux d'avoir une occasion de vous montrer comment des résultats, auxquels ma théorie des séries divergentes m'a conduit d'une manière intuitive, peuvent être démontrés directement par une méthode peut-être plus simple, mais qui semble assez artificielle.

Je considère une série de TAYLOR dont le rayon de convergence est égal à l'unité:

$$f(z) = \Sigma a_n z^n$$

et je suppose, pour plus de netteté, que $\sqrt[n]{|a_n|}$ a *pour limite un.* Dans le cas où il n'en serait pas ainsi, rien ne serait changé aux conclusions qui suivent, comme on le voit par des remarques analogues à celles que j'ai faites dans le Journal de M. JORDAN (1896, p. 451).

J'appellerai fonction entière associée à la fonction $f(z)$, la fonction

$$F(z) = \sum \frac{a_n z^n}{\underline{|n}}.$$

Lorsque on donne à z toutes les valeurs de module r, appelons $M(r)$ le maximum du module de $F(z)$; on démontre facilement (voyez mon mémoire sur les zéros des fonctions entières que vous imprimez actuellement dans les Acta[1]) que, lorsque r augmente indéfiniment $e^{-r(1+\alpha)}M(r)$ tend

[1] Acta mathematica, t. 20.