DAS RECIPROCITÄTSGESETZ IN DER THEORIE DER QUADRATISCHEN RESTE[1]

VON

JULIUS KÖNIG
in BUDAPEST.

In diesen Zeilen beabsichtige ich einen Beweis des Reciprocitätsgesetzes der quadratischen Reste vorzutragen, der — mit Ausschluss eines jeden andern Hülfsmittels — nur jene Eigenschaften des Legendre'schen, beziehungsweise Jacobi'schen Symbols benutzt, die unmittelbar aus der Definition entspringen. Damit erhält der neue Beweis gegenüber der langen Reihe bekannter Beweise eine ganz besondere Stellung und es ist damit auch sein formaler Gang festgelegt. Denn wo immer aus der Definition eines Operationssymbols dessen allgemeine Eigenschaften entwickelt werden sollen, kann dies im Wesen nicht anders, als mittels vollständiger Induction geschehn. Der mitzutheilende Beweis wird daher ebenso auf der vollständigen Induction beruhen, wie der erste Gauss'sche Beweis, der sich in der IV. Section der »Disquisitiones arithmeticae» findet; *er benützt aber jenes berühmte Gauss'sche Lemma nicht,* nach welchem, wenn p eine Primzahl von der Form $8n + 1$ ist, es immer unterhalb $2\sqrt{p} + 1$ eine Primzahl q gibt, von welcher p quadratischer Nichtrest ist.

Die Quelle dieses Lemma's findet sich in Wahrheit erst in den Tiefen der Theorie der quadratischen Formen, und sein elementarer Beweis hat GAUSS bekanntlich grossen Schwierigkeiten verursacht; »demonstratio satis diu operam nostram elusit» — berichtet er selbst darüber, während KRONECKER[2] GAUSS' Gedankengang seinerzeit mit folgenden Worten charak-

---

[1] Der ungarischen Akademie der Wissenschaften vorgelegt am 18 November 1895.

[2] Mon. Ber. d. k. p. Akad. d. Wiss. zu Berlin, 1876, pag. 341.