ISOMORPHISMES ENTRE ESPACES H_1

PAR

BERNARD MAUREY

Université Paris VII, Paris, France

Introduction

L'espace de Hardy H_1 des fonctions holomorphes F dans le disque unité telles que $\sup_{r<1} \int |F(re^{i\theta})|\, d\theta < \infty$ a été étudié depuis de nombreuses années. Plus récemment, après la découverte de la dualité H_1 – BMO, une théorie parallèle des espaces H_1 de martingales s'est développée. Si $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace de probabilité et $(\mathfrak{F}_n)$ une suite croissante de sous-σ-algèbres de $\mathcal{A}$, on introduit l'espace $H_1[(\mathfrak{F}_n)]$ des $\mathfrak{F}_n$-martingales dont la fonction maximale est intégrable (voir la section 0 pour les définitions précises). Nous étudierons en particulier le cas où les $(\mathfrak{F}_n)$ sont les algèbres dyadiques $(\mathcal{A}_n)$ sur $[0, 1]$, et nous appellerons $H_1(\delta)$ l'espace $H_1[(\mathfrak{F}_n)]$ obtenu dans ce cas.

La similitude des résultats obtenus dans la théorie classique et dans la théorie « martingales » amène à se poser la question de la comparaison de H_1 et $H_1(\delta)$ en tant qu'espaces de Banach. Le résultat essentiel de notre article est le suivant :

THÉORÈME. *Les espaces H_1 et $H_1(\delta)$ sont isomorphes.*

On sait depuis Paley que l'espace L_p, $1 < p < \infty$, admet le système de Haar comme base inconditionnelle. Au contraire L_1 ne peut pas se plonger dans un espace à base inconditionnelle. Le cas intermédiaire de l'espace H_1 est resté ouvert, mais le théorème précédent apporte une réponse, puisque $H_1(\delta)$ admet aussi le système de Haar pour base inconditionnelle (voir section 0). On obtient par conséquent :

COROLLAIRE. *L'espace H_1 admet des bases inconditionnelles.*

Nous n'expliciterons pas la base de H_1 dont l'existence résulte du théorème. Cela serait théoriquement possible, mais le système de fonctions ainsi obtenu serait trop compliqué pour être pratiquement utilisable. Le problème suivant reste donc posé :