

KONVERGENZPROBLEME IN DER THEORIE DER GAMMAFUNKTION.

VON

ALFRED TAUBER

in WIEN.

Die Untersuchung der von zwei Variablen x, α abhängigen Funktion

$$(1) \quad \varphi(x, \alpha) = x^{\alpha-1} e^x \int_x^\infty e^{-u} u^{-\alpha} du = \int_0^\infty e^{-xt} (1+t)^{-\alpha} dt, \quad \Re(x) > 0$$

führt beinahe unmittelbar, allerdings abgesehen von der etwas umständlich zu behandelnden Konvergenzfrage, für $\varphi(x, \alpha)$ zu einer Reihenentwicklung, bei welcher, im Gegensatze zu anderen¹ weit komplizierteren auf diesem Gebiete, jeder Term die Trennung der beiden Variablen x, α involviert, und welche bei $\Re(x) > 0$ für alle α unbedingt konvergiert. Es ist dies eine nach Binomialkoeffizienten von $(\alpha-1)$ fortschreitende Reihe

$$(2) \quad \varphi(x, \alpha) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \binom{\alpha-1}{\nu} \Phi_\nu(x), \quad \Re(x) > 0$$

worin die Funktionen $\Phi_\nu(x)$ linear aus dem Integrallogarithmus zu berechnen sind u. z. entweder sukzessive

$$(3) \quad \Phi_0(x) = \varphi(x, 1) = -e^x \operatorname{li}(e^{-x})$$

$$(3 \text{ a}) \quad \Phi_1(x) = (x+1) \Phi_0(x) - 1$$

$$(3 \text{ b}) \quad \Phi_{\nu+1}(x) = (x+2\nu+1) \Phi_\nu(x) - \nu^2 \Phi_{\nu-1}(x), \quad \nu \geq 1$$

oder auch independent,² vgl. Formel (10).

¹ Vgl. N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Gammafunktion, Leipzig 1906, S. 213–215.

² Andere explizite Entwicklungen in der Theorie der Gammafunktion werden im Abschnitt V betrachtet.